This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

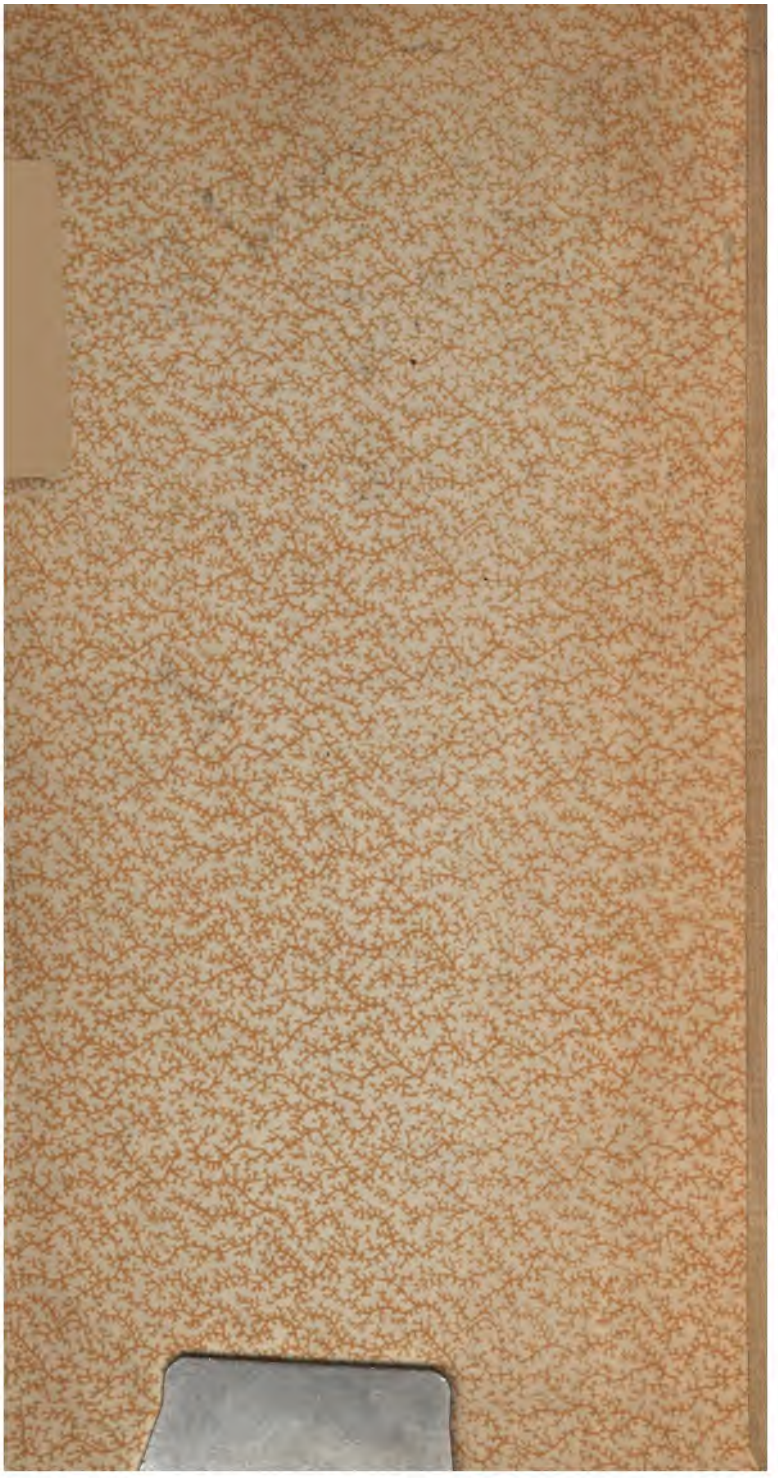
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

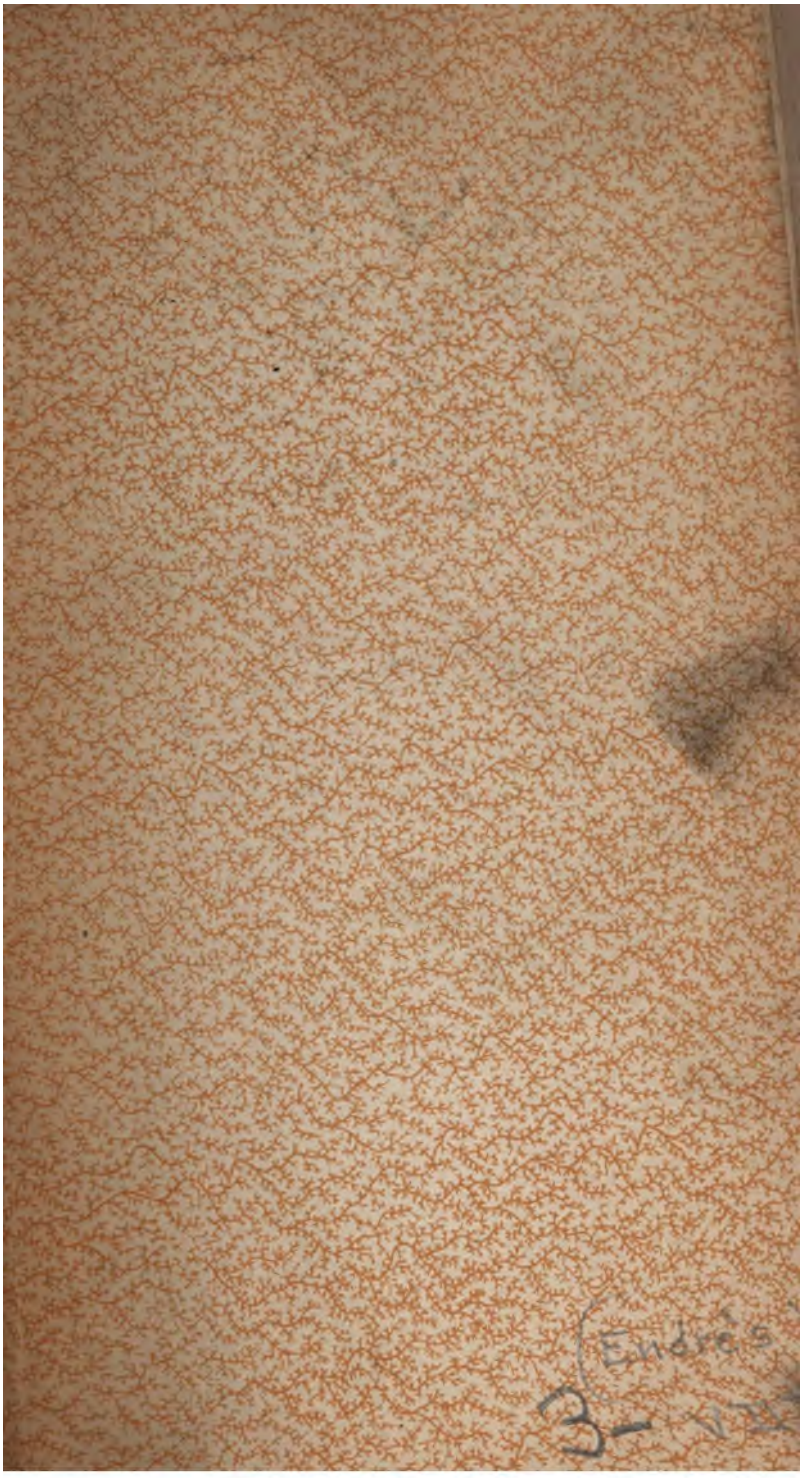
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633868 6




Endres
3-

MANUEL

DU CONDUCTEUR

DES PONTS ET CHAUSSÉES.

TYPOGRAPHIE HENNUYER, RUE DU BOULEVARD, 7. BATIGNOLLES.
Boulevard extérieur de Paris.

MANUEL

DU CONDUCTEUR

DES PONTS ET CHAUSSÉES,

RÉDIGÉ

D'APRÈS LE NOUVEAU PROGRAMME OFFICIEL

PAR

E. ENDRÈS,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Ponts et Chaussées
et de la Compagnie des Chemins de fer du Midi.

OUVRAGE INDISPENSABLE

**Aux Conducteurs et Agents secondaires des Ponts et Chaussées
et des Compagnies de Chemins de fer,
aux Agents voyers, et à tous les Candidats à ces emplois;**

Avec Figures dans le texte et Planches gravées.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vor DALMONT,

LIBRAIRES DU CORPS IMPÉRIAL DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

QUAI DES AUGUSTINS, 49.

1854

4 S.S

AVERTISSEMENT.

En entreprenant la rédaction des développements relatifs à certains articles du programme arrêté le 26 juillet 1851 par M. le Ministre des travaux publics, pour l'admission à l'emploi de conducteur auxiliaire des ponts et chaussées, nous avions eu d'abord et seulement en vue de faciliter les études préparatoires des aspirants peu nombreux de notre localité, et de leur offrir, dans un cadre restreint, mais cependant suffisant, des notions spéciales et techniques, qu'il leur eût été difficile, sinon impossible, de recueillir dans les volumineux ouvrages où elles se trouvent disséminées et pour ainsi dire noyées.

Notre travail n'était donc nullement destiné à la publicité; mais, par une appréciation sans doute trop bienveillante de notre premier essai, quelques-uns de nos camarades et amis ayant pensé que sa publication répondrait à un besoin réel, et serait d'un

grand secours aux nombreux jeunes gens que les récents bienfaits de l'Administration pour le bien-être des conducteurs attirent vers cette honorable profession, nous nous sommes empressé de consacrer à cette œuvre les instants de repos que nous laissait l'exercice de nos fonctions.

Il entrait naturellement dans notre plan de laisser de côté tous les articles du programme relatifs aux connaissances littéraires et aux éléments de mathématiques pures, qui ne peuvent guère s'étudier utilement qu'avec les développements renfermés dans les ouvrages spéciaux, et qui ne se rattachent pas d'ailleurs directement au service des travaux publics. Nous voulions donc nous borner aux questions comprises sous les cinq titres : *Statique, Lever des plans, Nivellement, Cubature des terrasses et mouvement des terres, Pratique des travaux;* toutefois, dès le début, nous avons reconnu l'impossibilité d'exposer, avec la clarté désirable, les principes du lever des plans et du nivellement sans des renvois fréquents aux formules trigonométriques, qui nécessitent elles-mêmes l'application continuelle de la théorie des logarithmes, et nous n'avons pu hésiter à introduire dans notre ouvrage les titres IV et VIII, qui traitent respectivement des *logarithmes* et de la *trigonométrie rectiligne*. Nous devons, en outre, faire

observer que, l'ordre adopté par l'Administration plaçant la statique sous le n° 7 et la trigonométrie sous le n° 8, il était suffisamment indiqué par là que les propriétés relatives à la première de ces deux branches devaient être établies sans le secours des procédés fournis par la seconde; nous avons pris soin de nous conformer à cette exigence, et nous espérons néanmoins avoir satisfait d'une manière complète et claire à ce que prescrivent sur ce sujet l'esprit et la lettre du programme.

L'ouvrage que nous présentons comporte, par sa nature, peu ou point de vérités propres à son auteur; tout ce qu'il renferme est, de longue date, dans le domaine commun de l'enseignement et dans les ouvrages spéciaux sur chaque matière; on comprendra par suite aisément que, devant faire, quant au fond, des emprunts fréquents aux auteurs qui ont écrit avant nous, nous ayons repoussé l'exercice puéril de défigurer la forme de quelques lambeaux, dont l'introduction textuelle dans notre livre pouvait épargner le temps déjà si court qu'il nous était loisible de consacrer à sa rédaction. Ces auteurs nous pardonneraient sans peine de ne pas les désigner ici nominativement; nous nous plaisons néanmoins à constater que nous avons puisé, toutes les fois que l'occasion s'en est présentée, dans l'ex-

cellent *Traité d'architecture* de M. l'ingénieur en chef Reynaud, dans le *Traité de nivellement* de M. l'ingénieur Breton, dans le *Cours de topographie* de M. Salneuve, ainsi que dans les publications si consciencieuses et si justement appréciées de M. Claudel.

Ce Manuel n'a donc d'autre prétention, d'autre but que d'être utile aux jeunes gens qui se préparent, soit à l'examen de Conducteur des ponts et chaussées, soit à celui d'Agent voyer, dont le programme est, dans la plupart des départements, calqué sur le nôtre, soit enfin à la conduite des travaux des Compagnies concessionnaires des chemins de fer; il économisera leur peine, leur temps et leur argent, puisqu'il les dispensera de démêler laborieusement, dans des ouvrages fort chers, ce qui correspond aux besoins de l'épreuve qu'ils doivent subir; il sera recherché de même par les employés en exercice, auxquels il présente un résumé complet des connaissances nécessaires à leur pratique journalière.

Au point de vue tout spécial des examens pour l'admission des conducteurs des ponts et chaussées, lesquels, d'après les instructions administratives, doivent être annuellement passés, au chef-lieu de chaque département, devant une Commission com-

posée d'un ingénieur en chef et de deux ingénieurs ordinaires, nous sommes certain d'être encore utile au plus grand nombre de nos supérieurs immédiats et de nos camarades, qui sont en outre presque partout appelés à prendre une part prépondérante dans les examens d'agents voyers, et auxquels le temps et les préoccupations pratiques du service rendent nécessairement de jour en jour moins familière l'exposition théorique des vérités les plus usuelles. Ils nous sauront gré de leur mettre sous la main un livre renfermant, d'une part, le programme officiel, d'autre part, le développement de chacun des articles de ce programme, développement qui présente la série naturelle des questions à adresser aux candidats, et la réponse à chacune d'elles; sous ce dernier rapport, la table des matières placée à la fin de notre volume est un guide sûr et commode, dont les renvois au texte, par articles et par pages, ne laissent rien à désirer.

Enfin, pour rendre l'emploi de ce Manuel aussi facile que possible, nous avons placé dans le corps même de l'ouvrage toutes les figures nécessaires à sa parfaite intelligence, et nous avons de plus donné, dans cinq planches gravées avec soin d'après les meilleurs modèles et accompagnées de légendes explicatives, les dessins à une grande échelle des in-

struments de précision dont la description et l'usage sont indiqués dans le programme et développés dans le texte.

Nous espérons donc que le *Manuel du Conducteur des ponts et chaussées* sera favorablement accueilli à tous les degrés de la hiérarchie, et par tous ceux qui prennent part à l'exécution des travaux d'utilité publique; nous éprouverons une bien vive satisfaction, nous recevrons un ample dédommagement de nos soins, s'il nous est donné de reconnaître que cette modeste publication a rendu quelques services aux conducteurs, en facilitant et complétant leur instruction, aux ingénieurs et à l'Administration, en donnant à leurs agents, dès leur entrée en fonctions, un fonds de connaissances théoriques et pratiques dont il est impossible de nier l'heureuse influence sur la bonne exécution des travaux.

PROGRAMME D'EXAMEN

POUR L'ADMISSION A L'EMPLOI DE CONDUCTEUR AUXILIAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Les examens pour l'emploi de conducteur auxiliaire des ponts et chaussées ont lieu tous les ans, au commencement du mois d'octobre. Ils sont passés, au chef-lieu de chaque département, devant une Commission composée d'un ingénieur en chef et de deux ingénieurs ordinaires, désignés par le ministre.

Nul n'est admis à y prendre part, s'il n'est âgé de plus de vingt et un ans et de moins de trente ans. Toutefois, les militaires porteurs d'un congé régulier et les piqueurs qui, à l'âge de trente ans, comptaient plus de deux ans de service, pourront concourir jusqu'à trente-cinq ans.

Les demandes d'admission aux examens doivent parvenir à l'administration du 1er août au 1er septembre.

Elles doivent être accompagnées :

1° D'un acte de naissance ou de toute autre pièce constatant régulièrement l'âge du candidat;

2° D'une note faisant connaître ses antécédents et les études auxquelles il s'est livré. A cette note doivent être joints les diplômes, certificats, etc., qui auraient pu lui être délivrés. — Les demandes des piqueurs ou autres agents doivent être transmises et appuyées par les chefs de service.

L'administration arrête la liste des candidats qui pourront se présenter au concours dans chaque département.

Le tableau ci-après détermine les connaissances exigées des candidats et la valeur relative assignée à chacune des parties de l'examen, à raison de son étendue ou de son importance au point de vue du service des conducteurs.

CONNAISSANCES EXIGÉES.

Vale relati

1° *Écriture courante*, nette et très-lisible. . . . . .

2° *Principes de la langue française.* — (Indépendamment d'une dictée destinée à constater qu'ils savent suffisamment l'orthographe, les candidats auront à rédiger un rapport sur une affaire de service.). . . . . .

3° *Arithmétique.* — Numération décimale. — Addition, soustraction, multiplication, division; preuve de ces opérations.

Nombres décimaux. — Fractions.

Extraction des racines carrées et cubiques.

Système légal des poids et mesures.

Résolution de problèmes; questions d'intérêt, d'escompte, de société.

Proportions et progressions. . . . . .

4° *Logarithmes.* — Théorie des logarithmes et usage des tables.

5° *Algèbre.* — Addition et soustraction des polynômes. — Multiplication et division des monômes et des polynômes. — Équations du premier degré à une ou plusieurs inconnues. — Équations du second degré à une inconnue. . . . . .

6° *Géométrie.* — Préliminaires. — Égalité des triangles. — Droites perpendiculaires, obliques, parallèles. — Parallélogrammes, polygones. — Lignes proportionnelles; triangles semblables.

Mesure des angles. — Contact et intersection des cercles. — Tangentes et sécantes du cercle. — Polygones inscrits et circonscrits au cercle. — Aire des polygones et du cercle.

Propositions relatives à la ligne droite et au plan. — Plans perpendiculaires et parallèles. — Angles dièdres et trièdres.

Tétraèdres; pyramides. — Parallélipipèdes; prismes. — Polyèdres égaux et semblables. — Aire et volume du cône droit, du cylindre droit et de la sphère. . . . . .

7° *Statique.* — Composition et décomposition des forces parallèles, concourantes ou dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. — Détermination des centres de gravité.

Équilibre des machines simples et composées : le levier, la poulie, le plan incliné, le treuil, les moufles et la vis, en faisant abstraction du frottement. — Rapport entre les

A reporter. . . . . .

Report. 18

espaces parcourus par les points d'application de la puissance et de la résistance, lorsque la machine est mise en mouvement; égalité entre le travail moteur et le travail résistant. 1

8° *Trigonométrie rectiligne.* — Lignes trigonométriques. — Relations entre les lignes trigonométriques d'un arc. — Principales formules trigonométriques.

Usage des tables de sinus.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle ou d'un triangle quelconque. — Résolution des triangles. 2

9° *Géométrie descriptive.* — Méthode des projections.

Questions relatives à la ligne droite et au plan. . . . 2

10° *Dessin graphique et lavis*. 4

11° *Lever des plans.* — Mesure des distances. Chaîne d'arpenteur; stadia. — Réduction à l'horizontale des distances mesurées sur les pentes.

Mesure des angles. — Equerre d'arpenteur, alidade, graphomètre, boussole. — Usage et vérification des instruments.

Lever à l'équerre, à la planchette, à la boussole et au graphomètre.

Rapport et dessin des plans. — Indication des échelles adoptées dans le service des ponts et chaussées. — Copie et réduction des plans.

Tracé d'un axe sur le terrain; piquetage, alignements, courbes. — Plan parcellaire 5

12° *Nivellement.* — Niveau d'eau. — Niveau à bulle d'air; niveaux d'Égault et de Lenoir. — Mire à coulisse, mire parlante. — Usage et vérification des instruments.

Opération du nivellement; carnet. — Calcul des cotes de hauteur rapportées à un plan général de comparaison.

Modes de représentation du terrain adoptés dans le service des ponts et chaussées. — Dessin du profil en long, des profils en travers. — Plans cotés.

Tracé des profils sur le terrain. — Indication des points de hauteur pour les déblais et les remblais.

A reporter. 32

Report. 1

Niveau de pente de Chézy ; son emploi pour tracer sur le terrain une ligne d'une pente déterminée. . . . . .

13° *Cubature des terrasses et mouvement des terres.* — Évaluation du cube des terrassements : 1° par la méthode dite exacte ; 2° par les méthodes expéditives. — Usage des tables dressées par ordre de l'administration.

Règles générales pour la répartition des déblais. — Divers modes de transport. — Formules qui fixent la limite des distances entre lesquelles il convient de préférer tel ou tel mode de transport.

Détermination de la distance moyenne des transports. — Tableau du mouvement et de la répartition des déblais et des remblais. . . . . .

14° *Pratique des travaux.* — Notions sur les qualités et les défauts des matériaux, sur leur emploi dans les maçonneries et charpentes, sur les travaux d'entretien des routes, et sur la pratique des travaux en général. . . . . .

TOTAL. . . . . .

Les candidats possédant des connaissances plus étendues c celles du programme peuvent demander qu'elles soient con tées par les examinateurs.

L'examen de chaque candidat fait l'objet d'un procès-ver détaillé, indiquant les questions posées sur les diverses part du programme et la manière plus ou moins satisfaisante d elles ont été résolues.

La pièce d'écriture, la dictée, la rédaction et les dessins s joints au procès-verbal.

Afin d'arriver à une appréciation exacte et comparative mérite des candidats, il est attribué à chacune de leurs répon ou des parties de leur travail une valeur numérique exprin par des chiffres qui varient de 0 à 20, et qui ont respecti ment les significations ci-après :

0.	Néant.	12, 13, 14.	Assez bien.
1, 2.	Très-mal.	15, 16, 17.	Bien.
3, 4, 5.	Mal.	18, 19.	Très-bien.
6, 7, 8.	Médiocrement.	20.	Parfaitement.
9, 10, 11.	Passablement.		

Une moyenne est établie d'après ces chiffres pour chaque partie du programme; chacune de ces moyennes est multipliée par les nombres ou coefficients exprimant leur valeur relative, et la somme des produits donne le nombre total des points ou degrés obtenus pour l'ensemble des épreuves.

Nul ne pourra être déclaré admissible s'il n'a obtenu au moins la moitié du maximum pour chacun des articles 1, 2, 3, 6, 10, 11 et 12, et pour les autres articles réunis; et les deux tiers de ce maximum pour l'ensemble de son examen.

Les procès-verbaux d'examen sont transmis à l'administration avec un rapport général sur l'ensemble des examens, dans lequel les candidats sont classés suivant l'ordre de mérite que leur assigne le résultat du concours dans chaque département.

L'admissibilité des candidats à l'emploi de conducteur auxiliaire est déclarée par le ministre, sur le vu des procès-verbaux d'examen. Cette déclaration d'admissibilité ne confère, d'ailleurs, aux candidats aucun droit à une nomination immédiate; elle les met seulement en position de concourir, à l'exclusion de tous autres candidats, pour les emplois de conducteur vacants ou à créer, soit dans les départements où ils ont été examinés, soit dans tout autre département.

Arrêté par le ministre des travaux publics.

P. MAGNE.

Paris, 26 juillet 1851.

MANUEL

DU CONDUCTEUR

DES PONTS ET CHAUSSÉES.

LOGARITHMES.

THÉORIE.

1. Les logarithmes sont des nombres déduits d'autres nombres suivant une loi que nous allons exposer, et au moyen desquels les *multiplications*, *divisions*, *élévations aux puissances* et *extractions de racines* de degrés quelconques à opérer sur ceux-ci, sont respectivement abaissées à des *additions*, *soustractions*, *multiplications* et *divisions* à faire sur les premiers.

On comprend dès à présent de quel immense avantage doit être cette précieuse découverte qui ramène à des calculs simples des opérations toujours laborieuses et souvent même impossibles par les moyens ordinaires; elle est fondée sur la remarque suivante :

Soient les deux progressions indéfinies et croissantes,

$$\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 : \ldots : q^m : \ldots : q^n : \ldots : q^{m+n} : \ldots$$
$$\div 0 \cdot d \cdot 2d \cdot 3d \cdot 4d \cdot 5d \cdot 6d \cdot 7d \cdot \ldots \cdot md \cdot \ldots \cdot nd \cdot \ldots \cdot (m+n)d \cdot \ldots$$

l'une par quotient, ayant son premier terme égal à l'unité et pour raison un nombre quelconque q; l'autre par dif-

férence, ayant son premier terme égal à zéro et pour raison un nombre quelconque d. Il est facile de voir que chaque terme de la première progression est égal à la raison q élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent, et que chaque terme de la seconde est égal à la raison d répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui; c'est ainsi que le terme q^m de la progression par quotient en a m avant lui, et que le terme du même rang dans la progression par différence est représenté par m fois la raison ou par md.

A raison de cette corrélation entre les termes des deux progressions, chaque terme de la seconde est le logarithme du terme qui lui correspond dans la première, et nous allons immédiatement justifier cette assertion, en montrant que les logarithmes ainsi obtenus jouissent bien des propriétés énoncées dans la définition placée en tête de ce travail.

2. Lorsque, dans les deux suites qui précèdent, on fait le produit de plusieurs termes de la progression par quotient et la somme des termes correspondants de la progression par différence, ce produit et cette somme sont des termes qui se correspondent dans les deux progressions.

En effet, considérons d'abord deux termes quelconques q^m et q^n de la progression par quotient; leur produit q^{m+n} est nécessairement un des termes de cette progression dans laquelle il en a $m+n$ avant lui; les termes correspondants de la progression par différence sont md et nd; leur somme $(m+n)d$ est aussi l'un des termes de cette progression, et ce terme en a $m+n$ avant lui; le produit et la somme sont donc bien deux termes qui se correspondent. Le même raisonnement s'applique identiquement à

un nombre quelconque de termes, ce qui démontre le principe énoncé.

Ce principe fondamental peut encore se traduire comme il suit : *le logarithme du produit de plusieurs termes de la progression par quotient est égal à la somme des logarithmes de ces termes.*

3. L'utilité d'une propriété de cette nature serait contestable, s'il fallait en restreindre l'application aux seuls termes des deux progressions posées ci-dessus. Mais, si nous concevons qu'on insère successivement un certain nombre de moyens par quotient entre deux termes consécutifs quelconques de la première progression et le même nombre de moyens par différence entre tous ceux de la seconde, on obtiendra ainsi deux nouvelles progressions qui seront évidemment dans les mêmes conditions que les premières au point de vue spécial qui nous occupe, puisque les termes 1 et 0 n'auront pas cessé de se correspondre. Or, il suffira théoriquement que le nombre des moyens insérés soit suffisamment grand, pour que la différence entre deux termes consécutifs quelconques de chacune des deux nouvelles progressions devienne aussi petite que l'on voudra. Tous les nombres plus grands que l'unité peuvent, par conséquent, être considérés comme faisant partie d'une certaine progression par quotient commençant par l'unité et à laquelle correspond terme pour terme une progression par différence commençant par zéro; de même, tous les nombres plus grands que zéro peuvent être regardés comme faisant partie d'une progression par différence commençant par zéro et à laquelle correspond terme pour terme une progression par quotient commençant par l'unité; nous pouvons donc dire que *tous les nombres plus grands que l'unité ont des lo-*

garithmes qui jouissent de la propriété sus-indiquée, et réciproquement, que *tout nombre plus grand que zéro peut être considéré comme le logarithme d'un autre nombre plus grand que l'unité.* Cette conclusion est de la plus haute importance, puisqu'elle assigne à ce qui va suivre un caractère de généralité seul capable de donner à l'application des logarithmes tous les avantages qu'ils comportent.

4. Le logarithme du produit de deux facteurs f et f' étant égal (2) à la somme des logarithmes de ces deux facteurs, il en résulte que *le logarithme du quotient d'une division est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur;* car, le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, le logarithme du dividende n'est autre chose que la somme des logarithmes du diviseur et du quotient.

Le logarithme du produit de plusieurs facteurs f, f', f''...., f^n, étant égal à la somme des logarithmes de tous ces facteurs, il en résulte que *le logarithme de la puissance* n *d'un nombre est égal à* n *fois le logarithme de ce nombre;* en effet, si les n facteurs deviennent tous égaux entre eux, leur produit n'est autre chose que la puissance n de l'un d'eux, et la somme de leurs logarithmes devient égale à autant de fois le logarithme de l'un d'eux qu'il y a de facteurs.

Inversement, *le logarithme de la racine* $n^{ème}$ *d'un nombre* A *est égal au quotient du logarithme de ce nombre par l'indice* n *de la racine;* car, le nombre A étant le produit de n facteurs égaux à sa racine $n^{ème}$, le logarithme de ce nombre est égal à n fois celui de la racine, ou, ce qui est la même chose, le logarithme de la racine est égal à celui du nombre A divisé par n.

Ainsi se trouve pleinement justifiée la définition des logarithmes, en ce sens que, si l'on avait sous les yeux une table contenant, d'une part, tous les nombres plus grands que l'unité, de l'autre et en regard, leurs logarithmes, il suffirait :

1° Pour obtenir le produit d'un nombre quelconque de facteurs, de prendre le nombre correspondant au logarithme égal à la somme de ceux des facteurs;

2° Pour avoir le quotient de deux nombres, de prendre le nombre correspondant au logarithme égal à la différence de ceux des deux nombres donnés;

3° Pour élever à la puissance n un nombre, de prendre le nombre correspondant au logarithme égal à n fois celui du nombre donné;

4° Enfin, pour extraire la racine de degré n d'un nombre, de prendre le nombre correspondant au logarithme égal au quotient du logarithme du nombre donné par n.

5. Mais une pareille table, contenant tous les nombres plus grands que 1 et leurs logarithmes, est, par sa nature même, irréalisable; les propriétés qui précèdent fournissent heureusement, comme on le verra bientôt, les moyens d'en restreindre le cadre à des limites usuelles qui comportent simplement les logarithmes des nombres entiers. Quoi qu'il en soit, il est toujours nécessaire de faire un choix entre les divers systèmes de logarithmes qu'il est possible d'adopter, c'est-à-dire de fixer la relation que l'on veut établir entre les deux progressions; cette fixation se fait d'ordinaire en déterminant quelle est la valeur numérique du terme de la progression par quotient qui correspond au terme égal à 1 de la progression par différence.

termes $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc.; car ces logarithmes n'ont nécessairement pas d'expression comprise entre zéro et l'infini; ce n'est donc qu'au moyen de conventions nouvelles qu'on peut étendre la série par différence à gauche de son terme zéro. Pour cela on remarque que, dans cette progression, chaque terme peut se tirer de celui qui le suit en en retranchant la raison, c'est-à-dire, dans le système actuel, l'unité. Le terme qui précède zéro s'obtiendra donc en ôtant l'unité de zéro, et, cette soustraction ne pouvant s'effectuer, on est convenu de l'indiquer seulement par 0—1 ou simplement —1; de même, le terme qui doit précéder —1 s'obtiendra en retranchant l'unité de — 1 ou 2 unités de zéro; il sera donc 0—2 ou simplement—2; par la même raison, le terme précédant —2 est 0—3 ou —3, et ainsi de suite. Cette nouvelle progression étant ainsi formée,

$$\div\ldots.—5.—4.—3.—2.—1.0.1.2.3.4.5.\text{etc.}$$

rien ne s'oppose à ce que l'on considère les termes à gauche de 0 comme les logarithmes des termes fractionnaires qui leur correspondent dans la progression par quotient, puisque l'opération incomplète qui a servi à écrire le terme —4, par exemple, est précisément celle à laquelle donnerait lieu le calcul du logarithme de la fraction $\frac{1}{10000}$, et conduirait à retrancher du logarithme de 1, c'est-à-dire de zéro, celui de 10000 ou 4. Ces nouvelles quantités indicatives d'une soustraction impossible prennent, d'ailleurs, le nom de *quantités négatives*.

Le système complet des deux progressions est donc maintenant ainsi représenté dans toute son étendue,

÷...0,0001:0,001:0,01:0,1:1:10:100:1000:10000:...
÷... —4 . —3 . —2 . —1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 ...

et quand les premiers éléments d'algèbre auront appris à introduire les quantités négatives dans les calculs, il sera facile de se convaincre que les propriétés que nous avons établies pour la partie du système située au delà des termes 1 et 0 s'étendent, sans aucune restriction et sans discontinuité, dans la région située en deçà de ces termes, par l'insertion de moyens proportionnels. Nous pouvons, quant à présent, nous borner à considérer les termes — 1, —2, —3, etc., comme les logarithmes respectifs de 0,1, 0,01, 0,001, etc., et comme établissant les limites entre lesquelles sont nécessairement situés les logarithmes des fractions intermédiaires entre 1 et 0,1, entre 0,1 et 0,01, etc., puisque, par le principe posé au n° 5 relativement aux logarithmes des nombres qui diffèrent par un facteur égal à une puissance de 10, on ramène facilement les calculs relatifs au passage des nombres à leurs logarithmes et réciproquement, à s'effectuer dans la région entièrement positive du système, pourvu qu'on tienne compte, après les opérations, de l'altération qu'on aura préalablement fait subir aux données.

Aussi les tables ne contiennent-elles que les logarithmes des nombres entiers, par la raison qu'il est facile d'en déduire ceux de tous les autres nombres positifs plus grands et plus petits que l'unité.

USAGE DES TABLES.

7. Ces tables, qui sont d'ailleurs peu nombreuses, présentent à peu près toutes la même disposition générale;

elles ne diffèrent guère que par leur étendue et par le nombre des chiffres décimaux que comporte la valeur approchée de chaque logarithme. Il est d'usage de n'employer dans les calculs que les logarithmes à 7 décimales que l'on trouve soit dans les petites tables de Lalande qui s'étendent jusqu'a 10000, soit dans celles de Callet qui vont jusqu'à 108000.

Quelle que soit celle de ces tables qu'on adopte, on y remarque, outre la colonne des nombres et celle des logarithmes, une autre colonne renfermant les *différences* entre les logarithmes des nombres entiers consécutifs. Ces différences jouent un rôle important dans les calculs logarithmiques; elles vont en diminuant à mesure qu'elles s'appliquent à des nombres plus élevés, et, en même temps qu'elles tendent vers zéro, elles tendent à devenir proportionnelles aux différences correspondantes entre les nombres; c'est cette proportionnalité, admise comme rigoureuse dans la partie la plus élevée de la table dont on fait usage, qui sert à passer, avec une approximation suffisante, des quantités contenues dans la table aux quantités intermédiaires.

Ceci bien établi, nous allons résoudre successivement les deux problèmes fondamentaux du calcul logarithmique, et nous supposerons d'abord que nous n'ayons à notre disposition que les tables de Lalande qui ont été publiées par le baron Reynaud.

PROBLÈME I.

8. *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

Premier cas. *Si le nombre donné est entier et moindre que* 10000, on cherche ce nombre à son rang naturel dans

la colonne des nombres, et son logarithme se trouve à la droite, dans la colonne des logarithmes.

Deuxième cas. *Si le nombre donné est entier et plus grand que* 10000, on ramène toujours la question à déterminer le logarithme d'un nombre compris entre 1000 et 10000.

Soit, pour exemple, à calculer le logarithme de 439857.

Ce nombre ayant six chiffres, nous savons d'abord que son logarithme a pour caractéristique 5. Maintenant le nombre donné est égal à $4398,57 \times 100$, et son logarithme ne diffère que de deux unités de celui de 4398,57, que nous allons par conséquent chercher.

Cela posé, 4398,57 étant compris entre 4398 et 4399, son logarithme tombe entre les logarithmes tabulaires 3,6432552 et 3,6433540 de ces deux nombres. La quantité dont il faut augmenter le plus petit des deux pour obtenir le logarithme de 4398,57, se calculera par la proportion énoncée plus haut (7). Or, la table indique que la différence entre les deux logarithmes de 4398 et 4399 est 988 unités décimales du septième ordre; si donc nous désignons momentanément par x la quantité cherchée, nous aurons à poser la proportion

$$1 : 0,57 :: 988 : x,$$

d'où $x = 563$ unités du septième ordre décimal.

Le logarithme de 4398,57 est donc 3,6432552 + 0,0000563, ou 3,6433115, et celui de 439857 est par conséquent 5,6433115.

On obtiendra de cette manière le logarithme d'un nombre entier quelconque plus grand que 10000.

Troisième cas. Si l'on veut *calculer le logarithme d'un nombre fractionnaire*, il faut, comme nous l'avons vu, re-

traucher le logarithme du dénominateur de celui du numérateur. Exemple : log. $\frac{1457}{326}$ = log. 1457 — log. 326 = 3,1634596 — 2,5132176 = 0,6502420.

S'il s'agissait d'une fraction proprement dite, on voit que le logarithme cherché serait nécessairement négatif; ainsi

$$\log \frac{27}{301} = \log. 27 - \log. 301 =$$
$$= 1,43136376 - 2,4786650 = -1,04720274.$$

Quatrième cas. *Calculer le logarithme d'un nombre décimal.*

Cette opération est identique avec celle des nombres entiers; on ramène le nombre donné à avoir cinq chiffres avant la virgule; on cherche le logarithme du nombre ainsi multiplié ou divisé par une puissance de 10, et on modifie la caractéristique en ayant égard à la position primitive de la virgule.

On trouve ainsi que

log. 43,9857 = 1,6433115,
log. 4,39857 = 0,6433115,
log. 0,439857 = $\overline{1}$,6433115,
log. 0,0439857 = $\overline{2}$,6433115,
log. 0,00439857 = $\overline{3}$,6433115, etc.

Le signe — placé au-dessus de la caractéristique d'un logarithme indique que cette caractéristique est seule négative et que la partie décimale 0,6433115 doit être ajoutée à — 1, — 2, — 3, etc.; de cette manière, le logarithme $\overline{3}$,6433115 équivaut à — 3 + 0,6433115.

Cette nouvelle forme des logarithmes négatifs est d'un usage très-commode dans la pratique; elle conserve sur la

forme ordinaire l'avantage de présenter sans altération la partie décimale commune à tous les logarithmes des nombres qui ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance de 10.

Rien n'est d'ailleurs plus facile que de passer d'une forme à l'autre; car la caractéristique du logarithme entièrement négatif est toujours moindre d'une unité, en valeur absolue, que celle du logarithme mixte, et les deux parties décimales sont toujours, en valeur absolue, complémentaires l'une de l'autre, c'est-à-dire que leur somme est égale à l'unité.

Ainsi $\overline{3},6433115 = -3+0,6433115 = -2-1+0,6433115 = -2-(1-0,6433115) = -2-0,3566885 = -2,3566885.$

Il est clair en effet que les parties décimales 0,6433115 et 0,3566885 sont complémentaires, et l'une se déduit de l'autre à la seule inspection, en retranchant de 10 le premier chiffre significatif à droite, puis successivement tous les autres de 9.

PROBLÈME II.

9. *Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il correspond.*

Premier cas. *Si le logarithme donné est positif,* il appartient à un nombre plus grand que l'unité, et sa caractéristique, augmentée de 1, indique combien il y a de chiffres dans la partie entière du nombre cherché.

Cela posé, si la caractéristique du logarithme donné est 3, le nombre correspondant est compris entre 1000 et 10000; on cherche ce logarithme dans la deuxième colonne de la

table, et, s'il s'y trouve exactement, le nombre cherché est placé en regard dans la première colonne.

Si ce logarithme ne se trouve pas exactement dans la Table, il tombe entre deux autres dont le plus petit correspond au nombre qui exprime la partie entière de celui que l'on cherche. Quant à la partie décimale de ce nombre, elle s'obtient par la proportion posée dans le problème précédent.

Soit, par exemple, à chercher à quel nombre appartient le logarithme 3,6433115.

Nous voyons dans la Table que ce logarithme tombe entre 3,6432552 et 3,6433540, qui correspondent respectivement à 4398 et 4399, et nous concluons déjà que la partie entière du nombre cherché est 4398.

Pour obtenir la partie décimale, nous prenons dans la Table la différence 0,000988 entre les deux logarithmes ci-dessus et, considérant que la différence entre le logarithme de 4398 et le logarithme donné est 0,0000563, nous posons la proportion :

$$0{,}0000988 : 0{,}0000563 :: 1 : x$$

ou $$988 : 563 :: 1 : x, \text{ d'où } x = \frac{563}{988} = 0{,}5698.$$

Le nombre cherché est par conséquent 4398,5698 ou, à moins d'un centième près, 4398,57.

Quand la caractéristique du logarithme donné n'est pas 3, on la suppose momentanément égale à ce chiffre et on opère comme il vient d'être dit; on place ensuite, dans le nombre trouvé, la virgule au rang que lui assigne la caractéristique primitive. C'est ainsi qu'on trouverait que le logarithme 1,6433115 correspond à 43,9857, et le logarithme

5,6433115 au nombre 439857, ou plus exactement à 439856,98.

Deuxième cas. Supposons maintenant *que le logarithme donné soit négatif.*

1° *S'il est entièrement négatif*, on lui ajoute autant d'unités qu'il en faut pour que le résultat soit entièrement positif et ait pour caractéristique 3; ce qui revient à ajouter 4 unités de plus qu'il y en a dans la caractéristique primitive. On cherche alors, par la méthode précédente, le nombre correspondant au logarithme ainsi transformé; puis on reporte la virgule d'autant de rangs vers la gauche qu'on a ajouté d'unités au logarithme.

Soit, par exemple, à déterminer le nombre correspondant au logarithme — 2,3566885.

Ajoutant 6 unités à ce logarithme, nous obtenons 3,6433115; or, ce dernier nombre étant le logarithme de 4398,57, le nombre cherché sera 0,00439857.

2° *Si la caractéristique seule est négative*, on lui ajoute assez d'unités pour qu'elle devienne positive et égale à 3; on opère comme ci-dessus et on reporte la virgule vers la gauche d'autant de rangs qu'on a ajouté d'unités.

Soit en effet le logarithme $\overline{2}$,6433115; si nous ajoutons 5 unités à la caractéristique, elle devient 3 et, le nombre 3,6433115 ainsi obtenu étant le logarithme de 4398,57, nous aurons à reporter la virgule de 5 rangs vers la gauche pour avoir le nombre 0,0439857 auquel correspond le logarithme donné.

10. De l'ensemble des règles qui précèdent, il résulte que, soit qu'il s'agisse de trouver le logarithme d'un *nombre donné*, soit qu'on cherche à quel nombre appartient un *logarithme donné*, on ramène toujours, au moyen de chan-

gements opérés, dans le nombre, sur la place de la virgule ou, dans le logarithme, sur la caractéristique, les calculs à se faire dans la période la plus élevée de la Table, celle qui s'étend de 1000 à 10000 ; cette prescription est fondée sur les deux propriétés que nous avons énoncées (7) relativement aux différences, savoir : que d'une part les différences entre les logarithmes sont d'autant moindres, que d'autre part la proportion employée est d'autant plus près d'être rigoureusement vraie, qu'on opère sur des nombres plus élevés. Les calculs y gagnent, comme on le voit, tant sous le rapport de la facilité que sous celui de l'exactitude, et, à ce double point de vue, les Tables de logarithmes sont d'autant plus précieuses en général qu'elles s'arrêtent à une limite plus éloignée.

11. Quelques mots suffiront maintenant pour indiquer l'usage des Tables de Callet qui sont généralement adoptées et répandues ; elles diffèrent de celles du baron Reynaud, outre quelques dispositions de détail que la seule inspection fait apercevoir, en ce que 1° elles s'étendent jusqu'à 108000, au lieu de s'arrêter à 10000, en sorte que c'est entre 10000 et 1000000 que se développe la période dans laquelle il y a lieu de ramener les nombres et les logarithmes ; 2° toutes les caractéristiques des logarithmes sont supprimées, à cause des règles précises et simples qui ne laissent jamais d'incertitude sur ce point ; 3° la portion de la partie décimale qui se reproduit dans plusieurs logarithmes successifs, n'est écrite qu'une seule fois pour tous en tête du premier ; 4° les logarithmes des dix nombres de chaque dizaine sont écrits sur la même ligne horizontale dans dix colonnes respectivement correspondantes aux dix chiffres qui représentent les unités, le nombre qui exprime

les dizaines étant seul écrit dans la colonne intitulée N; 5° ces tables contiennent, dans une dernière colonne intitulée *dif.*, non-seulement les différences entre les logarithmes consécutifs, mais encore les parties de ces différences, c'est-à-dire leurs produits successifs par 0,1, par 0,2, par 0,3, etc..., jusqu'à 0,9. Cette dernière disposition offre, on le voit, l'avantage précieux de donner tout calculés les résultats des multiplications et divisions auxquels conduisent les opérations relatives à des logarithmes non exactement compris dans les tables.

L'emploi des Tables de Callet ne présentera plus d'ailleurs aucune difficulté quand nous aurons développé les deux exemples suivants :

1° Calculer le logarithme de 43985698.

Ce nombre ayant 8 chiffres, la caractéristique de son logarithme sera 7. Pour trouver la partie décimale, nous chercherons celle du nombre de 5 chiffres entiers 43985,698, laquelle est la même que la première. Cherchons donc dans la colonne N le nombre 4398 et, combinant les indications des colonnes 0 et 5, nous trouvons que log. 43985 = 4,6433046.

Pour trouver maintenant l'accroissement de la partie décimale du logarithme, en raison de l'accroissement résultant de la partie décimale 0.698 du nombre 43985,698, nous pourrions établir ou supposer établie la proportion qui nous conduirait à multiplier par 0,698 la différence tabulaire 99, et par suite à ajouter au logarithme ci-dessus 69 unités décimales du septième ordre; mais les parties des différences, qui sont toutes calculées dans la table, nous dispensent de cette opération; nous voyons en effet, en examinant la petite table relative à la différence 99, que le

Soit, par exemple, une progression par quotient dont le premier terme soit 3, le dernier 192, et la somme des termes 381; demandons-nous quelle en est la raison q et le nombre des termes n.

Pour arriver à résoudre les deux équations ci-dessus par rapport à q et n, tirons de la première $q^{n-1}=\frac{\omega}{a}$, d'où $q^n=\frac{\omega q}{a}$, et portons cette valeur de q^n dans la deuxième; elle deviendra $s=\frac{\omega q-a}{q-1}$, d'où $q=\frac{s-a}{s-\omega}$. Maintenant nous pouvons tirer n de la relation transformée $q^n=\frac{\omega q}{a}$, sauf à y remplacer q, soit par sa valeur algébrique $\frac{s-a}{s-\omega}$, soit par cette valeur réduite en nombre au moyen des données, et l'on voit qu'ici l'emploi des logarithmes est indispensable.

En résumé, les expressions des inconnues q et n sont définitivement

$$q=\frac{s-a}{s-\omega},\quad n=1+\frac{\log\omega-\log a}{\log(s-a)-\log(s-\omega)},$$

lesquelles, pour $a=3$, $\omega=192$ et $s=381$, deviennent

$$q=\frac{378}{189}=2,\quad n=1+\frac{\log 381-\log 3}{\log 378-\log 189}=1+\frac{\log 127}{\log 2}=$$
$$1+\frac{2,10380372}{0,30103000}=1+6=7,$$

résultat facile à vérifier par le développement de la progression suivante :

$$\div\div 3\cdot 6\cdot 12\cdot 24\cdot 48\cdot 96\cdot 192.$$

2° Si un capital a est placé pendant n années à intérêts composés, le taux étant r pour un franc par an, on sait que ce capital aura acquis au bout des n années une valeur A donnée par la relation

$$A=a(1+r)^n.$$

Proposons-nous de trouver au bout de combien d'années ce capital sera décuplé, c'est-à-dire donnera $10a$, le taux r étant égal à 0f. 05.

L'équation propre à donner la valeur de l'inconnue n est, comme on voit, la suivante :

$$10a = a(1+0{,}05)^n,$$

ou

$$10 = (1{,}05)^n,$$

de laquelle on tire, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log 10 = n \log 1{,}05,$$

ou $$n = \frac{\log 10}{\log 1{,}05} = \frac{1}{\log 1{,}05} = \frac{1}{0{,}0211893} = 47{,}19, \text{ etc.}$$

On voit donc que c'est après 47 ans et 70 jours environ qu'un capital quelconque, placé à intérêts composés et à 5 pour 100, aura acquis une valeur décuple de sa valeur primitive.

STATIQUE.

13. La matière est *inerte*, c'est-à-dire incapable d'apporter par elle-même aucune modification à son état actuel de repos ou de mouvement; lors donc que nous voyons se mouvoir un corps précédemment en repos, ou lorsque le mouvement d'un corps vient à se modifier, soit quant à la direction, soit quant à la vitesse, nous devons attribuer cet effet à des causes étrangères au corps lui-même; ces causes se nomment des *forces*, et la direction d'une force est celle de la ligne suivant laquelle le point commencerait à se mouvoir en vertu de son action, s'il était entièrement libre.

On dit que des forces sont égales lorsque, appliquées en sens contraire à un même point libre et en repos, elles ne lui font prendre aucun mouvement. La notion de l'égalité conduit à celle du rapport quelconque, en entendant par *somme* de plusieurs forces, la force qui peut remplacer l'ensemble des premières, sollicitant le même point dans la même direction. Les forces, pouvant ainsi être évaluées en nombre, peuvent aussi être représentées par des longueurs proportionnelles à ces nombres, et il sera commode de prendre ces longueurs sur la direction suivant laquelle elles agissent et à partir du point auquel elles sont appliquées.

Cette représentation graphique des intensités des forces a le double avantage de faciliter les raisonnements et de permettre d'énoncer les vérités relatives aux forces sous la forme nette et précise qui caractérise les propositions de géométrie.

De ce qui précède, il résulte, d'une part, qu'un corps qui n'est soumis à aucune force se meut nécessairement en ligne droite et avec une vitesse uniforme, à moins qu'il ne soit en repos; d'autre part, que dans une force il y a trois choses à considérer, lesquelles sont : 1° *le point d'application*, c'est-à-dire la position géométrique du point matériel auquel elle est appliquée; 2° *la direction*, c'est-à-dire la direction et le sens de la droite que suivrait le point d'application, si, partant du repos, il cédait à l'action de cette force; 3° *l'intensité*, c'est-à-dire le nombre ou la longueur qui représente le rapport de cette force à la force prise pour unité de comparaison.

14. Lorsque des forces sont appliquées à un système de points ayant entre eux des liaisons quelconques, il est possible qu'elles produisent un mouvement, comme il est possible aussi qu'elles s'entre-détruisent et que le système reste en repos : dans ce dernier cas, on dit que les forces sont en *équilibre;* de là la division de la *mécanique* en deux branches principales : la *statique*, qui comprend l'ensemble des lois de l'équilibre, et la *dynamique*, qui étudie les lois du mouvement. Nous n'avons à nous occuper ici que de la première de ces deux subdivisions.

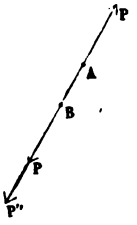
Lorsqu'un système de points est en équilibre, on ne détruit pas cet état en fixant un ou plusieurs de ces points, ou en établissant entre eux des liaisons nouvelles.

On peut encore, sans rompre l'équilibre, introduire de nouvelles forces qui se détruisent en vertu des liaisons du système; il est de même permis de supprimer des forces qui se détruisent; mais, pour ce dernier point, il est nécessaire que les forces se détruisent effectivement les unes les autres, et il ne suffit pas qu'elles soient telles qu'elles se détruiraient si elles agissaient seules sur le système; elles doivent produire réellement les effets qu'elles produiraient si elles étaient seules, pour que l'on puisse les supprimer avec la certitude de ne pas rompre l'équilibre.

Ces principes bien simples sont d'une grande utilité pour les transformations sans nombre qu'ils permettent de faire.

15. Lorsqu'une force P est appliquée à un point libre A, on peut, sans changer son effet, quel qu'il soit, l'appliquer à tout autre point B de sa direction, pourvu que ce nouveau point d'application soit invariablement lié au premier. Ce fait, qu'il est permis de regarder comme évident, s'établit toutefois d'une manière péremptoire par le raisonnement suivant : appliquons aux extrémités de la droite inextensible et incompressible AB deux forces P′, P″ égales à P et agissant en sens contraire dans les directions AP′ et BP″. Ces deux forces se neutralisent évidemment d'elles-mêmes, et leur introduction ne change rien au système primitif; mais, en envisageant maintenant l'ensemble des trois forces d'une autre manière, on peut dire que les forces P, P′, appliquées au même point A, en sens contraire, se détruisent, et il ne reste plus que la force P″, qui n'est autre chose que la force P transportée au point B de sa direction.

Fig. 1.



On raisonnerait d'une manière tout à fait analogue, si le

point B était situé, par rapport au sens d'action de la force, au delà de son point d'application A.

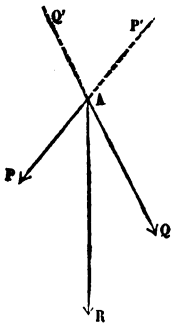
16. Si plusieurs forces P, P′, P″,... P^n, appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, se font équilibre, et si l'une quelconque P^n de ces forces vient à suspendre son action, le mouvement naîtra sous l'influence d'une force égale en intensité et directement opposée à ladite force P^n; cette nouvelle force, qui ferait équilibre à la force P^n, serait donc capable du même effet que l'ensemble des autres forces, et, pour ce motif, elle s'appelle leur *résultante*. Les premières forces, par rapport à leur résultante, sont dites ses *composantes*. Il est clair dès lors que la recherche de la résultante d'un système de forces rentre directement dans le domaine de l'équilibre.

Quoi qu'il en soit, ce qui vient d'être dit prouve d'une part que, *dans un système de forces qui sont en équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres;* d'autre part que, *quand plusieurs forces sont appliquées à un même point et qu'elles ne sont pas en équilibre, elles ont toujours une résultante.*

Quand ces forces agissent toutes dans la même direction sur un même point, il est clair que la résultante de toutes celles qui agissent dans un sens est égale à leur somme; que la résultante de toutes celles qui agissent dans le sens opposé est de même égale à leur somme, et qu'enfin la résultante totale du système est égale à la différence de ces deux sommes et agit sur le point d'application dans le sens de la plus grande. Nous allons examiner maintenant le cas des forces de directions différentes et établir des règles pour trouver leur résultante.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES.

Fig. 2.

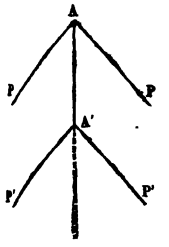


17. Lorsque deux forces P, Q, de directions différentes, agissent sur un même point matériel, leur résultante R ne peut se trouver située que dans le plan déterminé par les directions de ces deux forces; car on ne peut la supposer d'un côté de ce plan, sans que des raisons identiques obligent à la concevoir en même temps de l'autre côté dans une position symétrique; elle agit, de plus, dans l'angle PAQ de ses deux composantes; car le point A ne saurait évidemment se mouvoir que dans la partie du plan située à droite de PAP′ et dans celle qui est à gauche de QAQ′; par conséquent, il ne pourra marcher que dans la partie commune à ces deux régions, c'est-à-dire dans l'angle PAQ.

Dans le cas particulier où les deux forces sont égales, il est évident que la direction de leur résultante est celle de la droite qui divise leur angle en deux parties égales.

18. Deux forces égales à P, appliquées à un même point A, peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque A′ de la bissectrice de leur angle, pourvu que ce second point soit lié invariablement avec le premier; car les deux forces peuvent être remplacées par leur résultante dirigée suivant cette ligne, et celle-ci peut

Fig. 2.



être appliquée (15) en l'un quelconque A′ des points de sa direction. Or, en ce point A, la résultante peut évidemment être décomposée de la même manière qu'au point d'application et remplacée par deux forces P′ égales et parallèles aux premières, ce qui démontre la propriété énoncée.

19. Cela posé, nous allons démontrer que *la résultante de deux forces concourantes est représentée en direction et en* grandeur ou *intensité par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent ces forces en direction et en intensité.*

La première partie de notre démonstration s'appliquera exclusivement à déterminer la direction de la résultante, et nous considérerons d'abord le cas où les deux forces données sont commensurables entre elles.

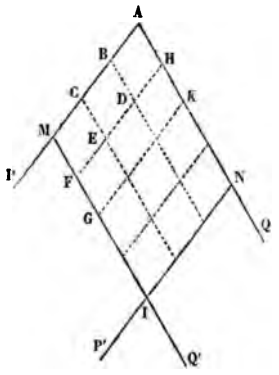
Soient donc P et Q ces forces; A leur point d'application; AM, AN des longueurs respectivement proportionnelles aux intensités de ces forces; m, n deux nombres entiers tels, que l'on ait ·

$$P : Q :: m : n :: AM : AN.$$

Partageons les longueurs AM et AN respectivement en m et n parties égales : ces diverses parties représenteront des forces dans lesquelles on pourra décomposer à volonté les premières; traçons enfin par des parallèles les losanges égaux ABDH, BCED, etc., dans toute l'étendue du parallélogramme MANI.

Maintenant, les deux forces égales AB, AH peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes au point D

Fig. 4.



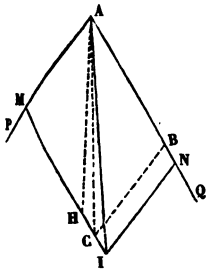
de la bissectrice de leur angle, puis respectivement transportées aux points B et H de leurs nouvelles directions ; elles seront alors représentées, en grandeur comme en direction, par les côtés BD, HD. En agissant de même sur les deux forces BD, BC, on les transportera sur DE, CE, et en continuant ainsi, la force AH se trouvera transportée en MF, et la force totale AM sur HF.

De même, les forces HK, HF pourront être transportées sur FG et KG, et ainsi de suite jusqu'à ce que les deux forces AM, AN se trouvent transportées par parties en NI et MI, sans que le système primitif ait été altéré en rien, notamment en ce qui regarde la direction de la résultante. Or, les deux forces MI et NI qui concourent en I ont une résultante qui passe au point I et qui ne diffère pas de celle des deux forces primitives AM et AN, laquelle passait évidemment au point A ; puisqu'elle passe en A et en I, cette résultante est donc dirigée suivant la diagonale du parallélogramme.

20. On peut étendre cette règle au cas des forces incommensurables par la considération des limites, ou bien employer la réduction à l'absurde, comme il suit :

Si la diagonale AI n'est pas la direction de la résultante des forces incommensurables AM, AN, soit AH cette direction. Partageons AM en parties égales plus petites que HI, de manière qu'en portant ces parties sur MI, il

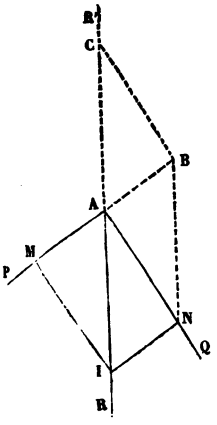
Fig. 5.



tombe au moins un point de division C entre H et I. Menons CB parallèle à AM; nous obtenons ainsi une force AB qui est commensurable avec AM, et la diagonale AC du parallélogramme MABC donne bien (19) la direction de la résultante de ces deux forces AB et AM. Pour avoir maintenant la résultante totale des deux forces données AM et AN, il faudrait composer cette première résultante dirigée sur AC avec la force BN, et cette nouvelle résultante ne saurait être dirigée que dans l'angle CAN; donc il est absurde de la supposer dirigée sur AH ou, comme on le démontrerait de la même manière, sur toute autre ligne différente de la diagonale AI.

21. On voit par là que, quel que soit le rapport des forces, leur résultante est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui les représentent. Il nous reste encore à établir que cette diagonale représente précisément en intensité la résultante des deux forces.

Fig. 6.



Pour cela, nous observerons que, si nous supposons appliquée suivant la direction AC, opposée à celle de la diagonale AI, une force égale à la résultante R, il y aura équilibre entre les trois forces P, Q et R; dans cet état, la force P, par exemple, pourra être considérée (16) comme

directement opposée et égale à la résultante des deux autres Q et R, et par conséquent, en prolongeant MA, on aura la direction de la diagonale d'un parallélogramme dont l'un des côtés sera en direction et grandeur AN, et dont l'autre côté, dirigé suivant AC, représentera la grandeur de la force R. Pour construire ce parallélogramme, il suffira de mener NB parallèle à AC, puis BC parallèle à AN. Mais la ligne AC est égale à la ligne BN, qui est elle-même égale à AI; donc la force R, ou la résultante des forces P et Q, est représentée par la diagonale AI; ce qu'il fallait démontrer.

22. Les deux composantes et leur résultante sont donc respectivement représentées par les trois côtés du triangle AMI, dont l'un des angles est le supplément de l'angle des deux composantes et qui peut facilement être construit par les procédés géométriques.

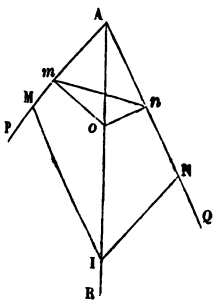
Dans le cas particulier où l'angle des forces est droit, le triangle AMI est rectangle en M, et l'on a la relation remarquable :

$$R^2 = P^2 + Q^2,$$

qui permet de calculer facilement l'une des trois forces, quand on connaît les deux autres.

23. En abaissant d'un point quelconque *o* de la diagonale AI des perpendiculaires *om*, *on*, dont on joint les pieds par la droite *mn*, on obtient un triangle *mon* dont les trois côtés sont proportionnels à ceux du triangle MAI et peuvent, par conséquent, représenter aussi les trois forces P, Q et R. La similitude des triangles repose d'ailleurs sur l'égalité de leurs trois angles chacun à chacun, parce que le quadrilatère *mAno* étant inscriptible dans une

Fig. 7.



circonférence, l'angle *mon* est, comme l'angle AMI, le supplément de l'angle MAN, et l'angle *mno*, par exemple, est égal à l'angle *m*A*o* comme étant inscrit dans le même arc que lui.

Cette remarque, dont l'utilité ne tardera pas à être mise en évidence, permet d'écrire la suite de rapports égaux

$$P : Q : R :: on : om : mn.$$

On peut en extraire la relation

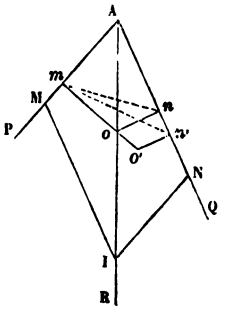
$$P \times om = Q \times on,$$

qui montre l'égalité des deux produits que l'on obtient en multipliant chacune des composantes par sa distance au point *o* de la résultante. Ces produits portent en mécanique le nom de *moments* des forces par rapport au point *o* et, au moyen de cette dénomination, le théorème dont il s'agit s'énonce d'une manière simple comme établissant *l'égalité des moments des deux composantes par rapport à un point quelconque de la résultante.*

Cette propriété de la résultante est assez importante pour que nous établissions avec soin qu'elle en jouit exclusivement. Supposons, en effet, que, pour un point o' extérieur à la résultante, on ait la relation

$$P \times o'm = Q \times o'n';$$

Fig. 8.



abaissons *on* parallèle à *o'n'* et tirons *mn* et *mn'*. Le point *o* étant sur la résultante, on a l'égalité

$$P \times om = Q \times on,$$

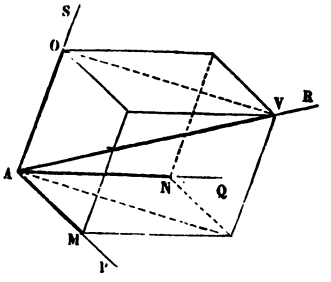
qui, combinée avec la première, donne

$$o'm : om :: o'n' : on.$$

Or, les angles *mon*, *mo'n'* sont égaux comme correspondants; les deux triangles *mon*, *mo'n'* sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels et les angles *omn*, *omn'* sont égaux, ce qui ne peut être qu'autant que *mn'* se confond avec *mn*; alors *n'o'* coïncide avec *no*, et le point *o'* tombe en *o*, ce qui est contre l'hypothèse; donc, le point *o'*, et plus généralement un point quelconque, ne peut jouir de la propriété en question qu'autant qu'il est situé sur la direction de la résultante des deux forces.

24. Pour composer en une seule trois forces P, Q, S, concourantes et non situées dans le même plan, on cherche d'abord la résultante de deux d'entre elles, P et Q, par la construction du parallélogramme; puis on compose de la même manière cette résultante partielle AT avec la troisième des forces données S; on trouve ainsi la résultante AV ou R, et il est facile de

Fig. 9.



voir que cette construction donne précisément la diagonale d'un parallélipipède construit sur les forces données comme arêtes.

Quand les angles que font entre elles les directions des trois forces données sont droits, le parallélipipède est rectangulaire, et, par une propriété géométrique connue, on a

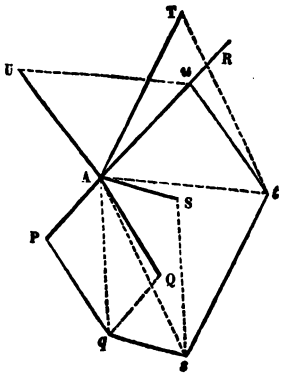
$$\overline{AV}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{AO}^2,$$

ou

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2.$$

25. S'il s'agit de composer entre elles un nombre quelconque de forces P, Q, S, T, U, issues d'un même point A et situées soit dans le même plan, soit dans des plans différents, la marche à suivre consiste à composer d'abord la première AP avec la seconde AQ en une résultante A*q* que l'on compose avec la troisième force AS, et ainsi de suite jusqu'à la dernière AU, qui servira à déterminer la résultante A*u* ou R de tout le système.

Fig. 10.



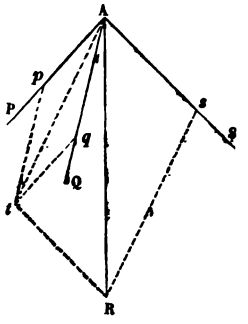
Pour ne conserver de cette construction que ce qui est indispensable à la détermination de la résultante cherchée, il suffit évidemment de mener P*q* égal et parallèle à AQ, *qs* égal et parallèle à AS, *st* égal et parallèle à AT; enfin, dans le cas de la figure ci-contre, *tu* égal et parallèle à AU, et de joindre l'extrémité *u* au point d'application A; on obtient ainsi un polygone plan ou gauche AP*qstu*, dont le

dernier côté Au représente en grandeur et en direction la résultante des forces données.

S'il arrivait que le polygone ainsi construit se fermât de lui-même par la coïncidence du point extrême *u* avec le point donné A, cette circonstance apprendrait évidemment que, la résultante Au des forces du système étant nulle, ces forces sont en équilibre.

26. Le problème de la décomposition d'une force donnée en deux autres passant par un même point de sa direction et situées avec elle dans un même plan, se résout, comme celui de la composition, par la construction d'un parallélogramme dans lequel on connaît ici la diagonale et la direction des deux côtés concourants. Par une construction analogue, on obtiendra le parallélipipède dont la diagonale, connue de grandeur et de position, représente la résultante de trois forces concourantes dans lesquelles on veut la décomposer; mais quand il s'agit de décomposer une force donnée en plus de deux autres dans un plan, ou en plus de trois dans l'espace, le problème est complétement indéterminé; nous allons mettre cette indétermination en évidence pour le cas le plus simple, celui d'une force R qu'il s'agirait de décomposer en trois autres situées avec elle dans un même plan et dirigées suivant les lignes AP, AQ et AS. Or, il est évident que, si nous prenons sur la direction AS, par exemple, une force quelconque As, nous pourrons, par la construction du parallélogramme AsRt, trouver une seconde force At qui,

Fig. 11.



composée avec As, donne pour résultante la force donnée R; nous décomposerons alors la nouvelle force At suivant les directions AP et AQ; de la sorte, la force R sera bien la résultante des trois forces Ap, Aq et As, et, cette dernière ayant été prise arbitrairement sur l'une quelconque des trois directions données, il est clair que le problème proposé est susceptible d'une infinité de solutions.

27. Au moyen de la décomposition des forces concourantes en trois autres, on peut ramener la recherche de la résultante d'un nombre quelconque de forces qui passent par le même point à la composition de trois forces rectangulaires; pour cela, on fait passer par le point commun trois droites quelconques que, d'ordinaire et pour plus de commodité, l'on prend rectangulaires entre elles; on décompose chacune des forces données en trois composantes dirigées suivant ces trois droites auxiliaires, et l'on réduit ainsi tout le système à trois forces rectangulaires que l'on compose facilement, soit par le parallélipipède des forces, soit par l'usage de la formule

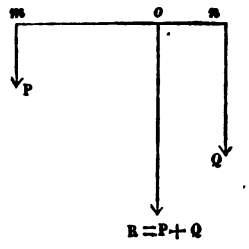
$$R^2=P^2+Q^2+S^2,$$

dans laquelle P, Q, S représentent les sommes des composantes respectivement réunies en une seule sur chacun des trois axes.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

28. La composition de deux forces parallèles appliquées à un corps solide se déduit de la manière la plus simple, comme cas limite, de celle de deux forces concourantes. On a vu en effet (23) que, lorsqu'il s'agissait de deux forces passant par un même point, les deux composantes et la résultante étaient respectivement représentées par les côtés d'un triangle *mon* formé en abaissant d'un point quelconque de la résultante des perpendiculaires sur les directions des composantes, et en joignant les pieds de ces deux perpendiculaires. Or, cette propriété est tout à fait indépendante de l'angle que font entre elles les deux forces données P et Q; l'angle *mon* étant le supplément de MAN, cet angle augmente à mesure que celui-ci diminue, et à la limite, quand le dernier devient nul, c'est-à-dire quand les composantes P et Q sont parallèles, l'angle *mon* est égal à deux angles droits; le point *o* est toujours un point de la résultante, laquelle passe par le point de concours des composantes et, par conséquent, leur est parallèle; en outre, la relation

Fig. 12.



$$P:Q:R::on:om:mn$$

ne cesse pas d'exister, de telle sorte que, d'une part, *mn* étant égal à $om+on$, on a

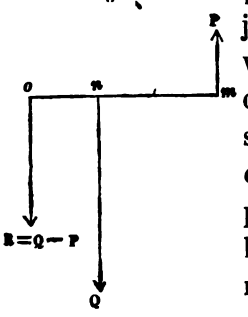
$$R=P+Q,$$

et que de l'autre, chacune des trois forces est représentée en grandeur par la distance des points d'application des deux autres.

On conclut donc immédiatement cette règle : *la résultante de deux forces parallèles et de même sens leur est parallèle, est de même sens que chacune d'elles, égale à leur somme et située entre elles et dans le même plan; ses distances aux deux composantes sont dans le rapport inverse des intensités de ces forces.*

29. Nous avons fait tourner la force AP et sa perpendiculaire *mo* autour du point *o*

Fig. 13.



jusqu'à ce que cette perpendiculaire vînt se placer dans le prolongement de *on*. Le même mouvement peut s'opérer en sens contraire jusqu'à ce que le point *m* vienne encore se placer sur la direction *on*, mais de l'autre côté du point *n*. A ce moment, les deux forces P et Q sont encore parallèles, mais elles agissent en sens contraires; leur résultante n'a pas cessé de passer par le point *o* et par leur point de concours; lequel, après s'être rapproché du point *n* jusqu'au moment où *mo* a rencontré la direction *n*A, s'en est ensuite éloigné rapidement jusqu'à l'infini; cette résultante est donc encore parallèle aux deux composantes; pendant tout le mouvement, elle n'a pas cessé d'agir du point de rencontre vers le point *o*; elle agit donc dans le sens de la plus grande force Q, quand le point de rencontre est à l'infini, et, de plus, la relation

$$P : Q : R :: on : om : mn$$

est encore vraie à cette limite; d'où il résulte que mn étant égal à $om - on$, on a aussi

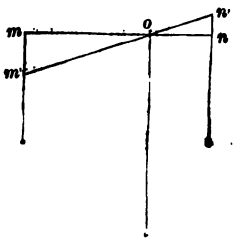
$$R = Q - P.$$

Chacune des trois forces est d'ailleurs, comme dans le premier cas, représentée par la distance des points d'application des deux autres.

De là ce second théorème : ***La résultante de deux forces parallèles et de sens contraires leur est parallèle, est égale à leur différence, de même sens que la plus grande, située dans le même plan avec elles et au delà de la plus grande par rapport à la plus petite; ses distances aux deux composantes sont en raison inverse des intensités de ces forces.***

Remarque. Les distances mo, no et mn que nous avons mesurées sur une perpendiculaire à la direction commune des forces sont nécessairement proportionnelles à celles $m'o$, $n'o$ et $m'n'$ qui seraient prises sur une droite d'une inclinaison quelconque, en sorte qu'il est loisible de remplacer, dans les deux énoncés qui précèdent, les perpendiculaires par les portions correspondantes d'une droite inclinée sur la direction des forces; en d'autres termes, l'inclinaison commune des forces données sur la droite qui unit leurs points d'application n'influe en rien sur la grandeur et la position de leur résultante.

Fig. 14.



30. L'égalité établie au n° 23 entre les moments des deux forces concourantes par rapport à un point de leur résultante, subsiste encore pour les forces parallèles; car la proportion $P : Q :: on : om$ donne toujours

$$P \times om = Q \times on,$$

et cette relation est d'un usage commode pour fixer dans l'esprit la position de la résultante de deux forces parallèles données.

31. Dans le cas de deux forces parallèles et de sens contraires, le point d'application de la résultante s'obtient, avons-nous dit, au moyen de la proportion

$$P : Q : R :: on : om : mn,$$

laquelle donne $on = \frac{P}{R} \times mn = \frac{P}{Q-P} \times mn.$

Cette quantité devient infinie, si l'on suppose que les deux forces Q et P se rapprochent en intensité jusqu'à devenir égales entre elles, et leur résultante elle-même est nulle. Ce résultat singulier de la formule montre qu'on ne peut assigner ni la grandeur ni la position d'une force capable de remplacer un système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires; ce qui revient à dire qu'un pareil système, considéré par quelques auteurs, sous le nom de *couple*, comme un élément essentiel de la mécanique, n'a point de résultante.

32. Le théorème de la composition de deux forces parallèles que nous avons établi comme cas limite des forces concourantes et comme conséquence immédiate de la règle du parallélogramme des forces, peut se vérifier et, au besoin, se démontrer d'une autre manière assez simple; mais, tout en s'appuyant aussi sur la composition des forces qui passent par le même point, cette méthode perd l'avantage de montrer l'enchaînement et la connexité des deux ordres d'idées. Voici comment elle procède :

Aux deux points d'application *m* et *n*, on applique dans la direction de la droite *mn* deux forces F quelconques, égales, et dont l'introduction ne change, par conséquent, rien au système ; on compose par la règle du parallélogramme, d'une part les forces F et P, d'autre part les forces F et Q, et les deux résultantes se rencontrent au point C, où l'on peut les supposer transportées. Là, on décompose chacune de ces résultantes parallèlement aux directions de ses composantes primitives ; on retrouve ainsi les deux forces F qui se détruisent, et il reste, dirigées suivant CO et transportées, si l'on veut, au point O, deux forces respectivement égales aux deux forces P et Q ; la résultante de ces deux forces, laquelle n'est autre chose que celle des deux forces parallèles données, est égale à leur somme ou à leur différence, suivant que celles-ci étaient de même sens ou de sens contraires.

Fig. 15.

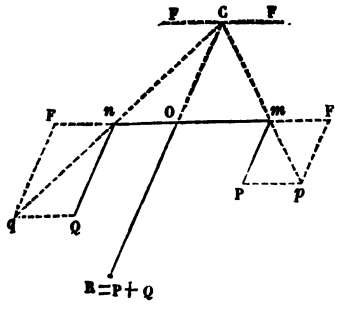
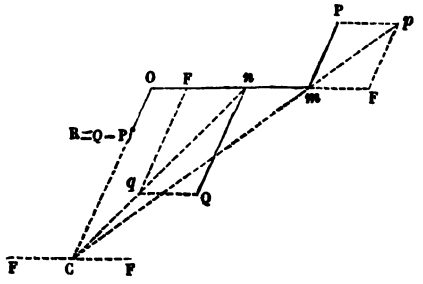


Fig. 16.



Maintenant les triangles semblables Q*nq* et *n*OC, P*mp* et *m*OC donnent les proportions

$$nO : OC :: Qq : Qn :: F : Q,$$
$$mO : OC :: Pp : Pm :: F : P,$$

dont les moyens sont les mêmes. Les extrêmes forment, par conséquent, la nouvelle proportion

$$P : Q :: nO : mO,$$

qui n'est autre chose que celle précédemment trouvée et qui, comme elle, peut s'écrire sous la forme

$$P : Q : P+Q \text{ ou } R :: nO : mO : nO+mO \text{ ou } mn.$$

33. Lorsqu'un corps solide est soumis à des forces parallèles, en nombre quelconque et situées dans un même plan ou dans des plans différents, on peut considérer d'abord toutes les forces P, P′, P″, etc., qui tirent dans un sens, composer P avec P′, la résultante avec P″, et ainsi de suite. En opérant de la même manière sur les forces Q, Q′, Q″, etc., qui agissent en sens contraire, on réduit tout le système à deux résultantes partielles qui sont de sens contraires, parallèles et égales chacune à la somme des forces qui agissent dans le même sens qu'elle. Il reste alors à composer ces deux forces en une seule par la méthode connue, et l'ensemble de ces opérations conduit à la règle générale qui suit :

Autant de forces parallèles que l'on voudra sont réductibles à une résultante unique qui leur est parallèle, est égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens sur la somme de celles qui tirent en sens contraire, et agit dans le sens de la plus grande somme.

Il est d'ailleurs entendu que, s'il arrivait que les deux sommes de forces fussent égales, le système donné serait

en équilibre de lui-même ou n'aurait pas de résultante unique (31), selon que ces deux sommes partielles seraient ou ne seraient pas directement opposées.

34. C'est ici le lieu de signaler une propriété remarquable du point d'application de la résultante d'un système de forces parallèles. Nous avons dit (29, Rem.) pour deux forces, et il est facile de voir que cela est encore vrai pour un nombre quelconque, que la grandeur et la position de leur résultante ne dépendent aucunement de l'inclinaison absolue des forces, mais seulement de la position de leurs points d'application et des rapports de leurs intensités; d'où l'on peut conclure que, quand on a déterminé le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, de même sens ou de sens contraire, on peut, sans que ce point d'application varie, changer l'intensité des forces et l'inclinaison générale de leur système, pourvu que ces forces restent parallèles entre elles, appliquées dans le même sens aux mêmes points, et que leurs intensités conservent les mêmes rapports.

Ce point, qui est spécialement regardé comme le point d'application de la résultante, porte, à cause de la propriété importante que nous venons d'exposer, le nom de *centre des forces parallèles*.

Remarque. Il est évident qu'en rendant fixe le centre des forces parallèles d'un système, il y aura équilibre, quelle que soit la position du système autour de ce centre, puisque, dans toutes les positions, la résultante passera par ce point et sera, par conséquent, détruite.

35. Le problème inverse de la composition de deux forces parallèles en une seule, a pour objet de décomposer une force donnée R en deux autres qui lui soient parallèles

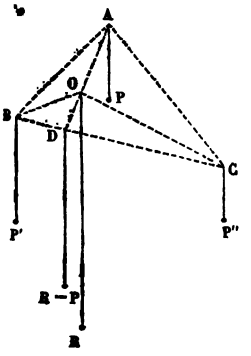
et appliquées en deux points déterminés m et n d'une droite passant par son point d'application O. La solution de cette question consiste tout simplement à partager la force donnée en deux parties proportionnelles aux distances Om, On des points donnés à son point d'application, et à répartir ces deux composantes de manière à satisfaire à la relation connue

$$P \times Om = Q \times On,$$

en ayant égard au sens dans lequel il convient d'appliquer ces forces en raison de leur position par rapport à la résultante.

36. Par un raisonnement semblable à celui du n° 26, nous montrerions que la décomposition d'une force donnée en trois autres, parallèles entre elles et à la première et situées avec elles dans le même plan, peut se faire d'une infinité de manières; mais cette indétermination disparaît quand les trois points d'application donnés sont dans un plan qui ne contient pas la direction de la force et ne lui est pas parallèle.

Fig. 17.



Soit, en effet, O le point d'application de la force R, situé dans le plan des trois points A, B, C, où doivent être respectivement appliquées les trois composantes cherchées; formons le triangle ABC et joignons le point O à l'un quelconque A des sommets; soit D le point de rencontre de OA avec le côté opposé; nous décomposerons d'abord la

force donnée R en deux composantes, l'une P appliquée en A, l'autre R—P en D; puis cette dernière R—P en deux autres P′ et P″ respectivement appliquées en B et C.

Le rapport entre ces trois forces peut d'ailleurs être établi d'une manière à la fois simple et remarquable; car la première décomposition nous donne

$$R : P :: AD : OD$$

et, si l'on tire les droites OB, OC, on voit que les lignes AD et OD sont proportionnelles aux hauteurs et par conséquent aux aires des triangles ABC et BOC, qui ont la même base BC.

En opérant de même à l'égard des deux autres sommets B et C, on obtiendrait évidemment les deux dernières des trois proportions suivantes :

$$R : P :: ABC : BOC,$$
$$R : P' :: ABC : AOC,$$
$$R : P'' :: ABC : AOB,$$

lesquelles peuvent se grouper comme il suit :

$$R : P : P' : P'' :: ABC : BOC : AOC : AOB,$$

et établissent que, *si l'on représente la force donnée par l'aire du triangle que déterminent les points d'application donnés des composantes, chacune de ces trois forces sera elle-même représentée par le triangle obtenu en joignant le point d'application de la résultante à ceux des deux autres composantes.*

37. Si le point O tombait en dehors du triangle ABC, la même décomposition pourrait encore s'effectuer; seulement les triangles obtenus en joignant ce point successivement

avec deux quelconques des points d'application donnés, ne seraient plus à l'intérieur du triangle ABC, et leur somme ne serait plus égale à l'aire de ce triangle, de même que la résultante ne serait plus égale à la somme des composantes. En général, suivant la position du point O, il y aurait dans ce cas *une* ou *deux* composantes de même sens que la force donnée et *deux* ou *une* de sens contraire; la différence entre la somme des forces agissant dans le même sens que la résultante et la somme de celles qui agissent en sens contraire, serait égale à cette force R, de même que l'aire du triangle ABC serait elle-même égale à l'excès de la somme des aires correspondantes aux premières forces sur la somme des aires correspondantes aux secondes.

Nous laissons au lecteur le soin de faire cette discussion qui, après ces indications, ne présente aucune difficulté.

38. On voit que le problème qui a pour but de décomposer une force donnée R en trois autres forces parallèles passant par trois points donnés, est entièrement déterminé; il est facile de voir que, si l'on donnait plus de trois points, il y aurait, au contraire, indétermination. En effet, on pourrait appliquer à tous les points donnés, excepté trois d'entre eux, des forces arbitraires quant à leur grandeur et au sens dans lequel elles agiraient; ces forces, composées par la règle du n° 33, donneraient lieu à une force unique que nous désignerons par R′. On décomposerait la force donnée R en deux forces, dont l'une fût R′; désignant l'autre par R″, il faudrait la considérer comme la résultante de trois forces passant par les derniers points; ce qui, d'après ce qu'on vient de voir, déterminerait complétement ces forces.

Ainsi, en général, quand on donnera un nombre m de points, les forces seront arbitraires pour $m-3$ de ces

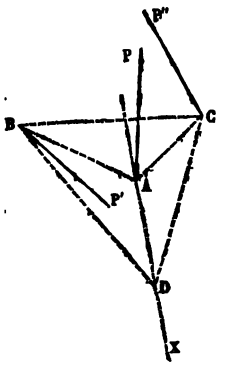
points pris à volonté, et celles qui passeront par les trois autres seront ensuite déterminables en fonction de ces forces arbitraires.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION

DES FORCES DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

39. Chercher à composer un système de forces qui sont appliquées à un corps solide dans des directions quelconques, c'est chercher à les ramener soit à une résultante unique, soit, en cas d'impossibilité, au groupe de forces équivalent le plus simple possible.

Fig. 18.



Soient donc F l'une des forces données et A, B, C trois points choisis arbitrairement, non en ligne droite, dans l'intérieur du corps ou au moins liés invariablement avec lui. Si l'on joint le point d'application de la force F à chacun des trois points A, B, C, on pourra décomposer cette force par la règle du parallélipipède en trois forces dirigées suivant ces trois droites, et transporter ensuite le point d'application des trois composantes aux points A, B, C, respectivement situés sur leur direction.

Après avoir agi de la même manière à l'égard des autres forces F′, F″, etc., du système, on aura obtenu en chacun des points A, B, C, un certain nombre de composantes formant trois groupes réductibles chacun à une force unique;

soient P, P′, P″ ces trois dernières qui remplacent toutes les forces primitives.

Ce nouveau système peut lui-même être simplifié. Faisons passer un plan par la force P′ et la ligne AB; puis, un second par la force P″ et la droite CA; ces deux plans se couperont suivant une ligne AX dont nous joindrons un point quelconque D aux points B et C. Dans cet état, chacune des forces P′ et P″ pourra se décomposer en deux autres, la première suivant BA et BD, la seconde suivant CA et CD. De ces quatre composantes, celles dirigées sur BA et CA se transporteront en A, où elles se composeront avec la force P qui y est appliquée; celles dirigées sur BD et CD pourront être appliquées en D et s'y composer en une seule, si ce dernier point est, comme le point A, supposé pris dans l'intérieur du corps ou au moins lié invariablement avec lui.

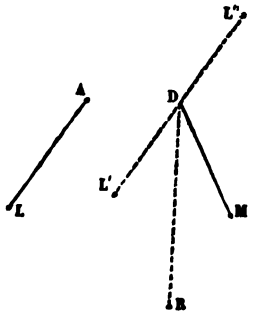
On aura donc ainsi ramené le système des forces P, P′, P″ et, par conséquent, celui des forces données F, F′, F″, etc., à deux forces, l'une passant par le point A pris arbitrairement, et l'autre par le point D; donc enfin, *un système quelconque de forces appliquées à un corps solide peut toujours se réduire à deux forces, dont l'une passe par un point donné arbitrairement dans le corps ou lié invariablement avec lui.*

S'il arrivait que les forces appliquées en A et D se trouvassent dans un même plan, elles se composeraient en une force unique qui serait la résultante générale du système donné, à moins qu'elles ne fussent égales, parallèles et de sens contraire, auquel cas elles n'auraient pas de résultante (31).

40. Une fois ramené à ces termes, le système proposé

n'est plus susceptible de simplification, c'est-à-dire que deux forces L et M, non situées dans le même plan et appliquées sur un corps aux points respectifs A et D, ne sauraient se réduire à une résultante unique. Pour se rendre compte de ce fait, supposons qu'au point D, par exemple, nous appliquions deux forces L′ et L″ opposées l'une à l'autre, égales et parallèles à la force L; le système des quatre forces L, L′, L″, M demeurera équivalent à tous égards au système primitif des deux forces L et M; or, les deux forces L′ et M pourront bien se composer en une seule DR qu'il faudrait elle-même composer avec la résultante des deux forces L et L″; mais ces dernières étant égales, parallèles et de sens contraire, leur résultante est nulle et située à l'infini (31), ce qui établit l'impossibilité absolue de la combiner avec les autres éléments du système.

Fig. 19.

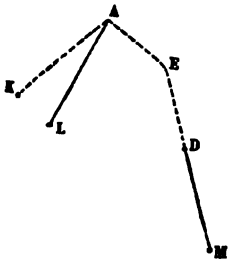


41. Enfin, il est bon d'ajouter que, lorsqu'on a ainsi ramené le système des forces données à deux forces L et M passant par deux points A et D, dont l'un D est pris à volonté, la grandeur et la direction de la force qui passe par le point donné A ne sont point déterminées, c'est-à-dire que l'on peut faire varier ces éléments, sauf à déterminer en conséquence la position de l'autre point, ainsi que la grandeur et la direction de la force qu'on devra y appliquer. Il résultera de cette observation, quand nous l'aurons suffisamment établie, qu'*il y a une infinité de systèmes de deux forces non concourantes et non parallèles, susceptibles de remplacer un système donné de forces en nombre*

quelconque et dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

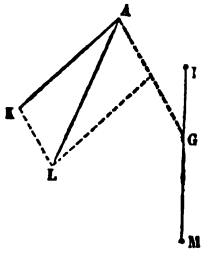
Supposons donc qu'on veuille remplacer la force L, appliquée au point donné A, par une autre force agissant suivant une direction quelconque AK; on mènera par les deux lignes AK, AL un plan qui coupera la droite DM en E; on décomposera la force L suivant AK et AE, et on combinera la composante dirigée sur AE avec la force M; de cette sorte, on aura, au lieu des forces L et M, le système équivalent de deux autres forces, l'une dirigée sur AK, comme on l'avait demandé, l'autre appliquée en E et dirigée d'une manière quelconque dans l'espace.

Fig. 20.



Si l'on demandait de remplacer la force L par une autre ayant une intensité déterminée K, il suffirait évidemment de joindre au point A un point G quelconque de la direction DM et, dans le plan GAL, de décomposer la force L en deux composantes, l'une dirigée sur AG, l'autre d'une intensité égale à K; ce qui revient à construire un parallélogramme dans lequel on connaît la longueur d'un côté, une diagonale et l'angle que forme le second côté avec cette diagonale; le reste de la transformation se fait alors comme ci-dessus.

Fig. 21.



Enfin, si la grandeur de la nouvelle force K était donnée en même temps que la direction AK, la grandeur et la

direction de la seconde composante de L seraient par là même déterminées ; mais la transformation sus-indiquée ne pourrait s'achever qu'autant que cette seconde composante viendrait rencontrer la direction DM de la force M.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

42. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes prennent un mouvement vers le centre de la terre, dans une direction qui est, en chaque lieu, perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles et qu'on nomme *verticale*. La cause de ce phénomène, c'est-à-dire la force qui sollicite tous les corps suivant la verticale, est la *pesanteur* ou *gravité* et, eu égard à la grandeur du rayon terrestre, ainsi qu'à des expériences directes, on peut considérer comme rigoureusement parallèles toutes les verticales d'un même lieu, en restreignant toutefois ce principe à des étendues relativement peu considérables.

La pesanteur sollicite les parties intérieures des corps comme les parties extérieures; il faut faire le même effort pour supporter un corps entier ou toutes les parties dans lesquelles on le divise, et, s'il est creux, les corps que l'on y renferme exercent le même effort que s'ils étaient placés à l'extérieur; c'est donc avec raison qu'on regarde cette force comme agissant sur toutes les parties qui composent les corps.

En appliquant la théorie des forces parallèles de même sens à celles qui proviennent de la pesanteur, on reconnaît d'abord qu'elles ont une résultante qui leur est parallèle et est égale à leur somme; on l'appelle le *poids* du corps. En second lieu, cette résultante a son point d'application indé-

pendant de la direction des forces relativement au corps; c'est le centre des forces parallèles produites par la gravité; on lui donne le nom de *centre de gravité*. On peut donc définir le centre de gravité d'un corps en disant que c'est *le point par lequel passe constamment la résultante des poids de toutes les parties ou molécules, quelle que soit la position que prenne le corps par rapport à la direction verticale de tous ces poids.*

Il est bon de remarquer que les molécules d'un corps peuvent être disposées de telle sorte que le centre de gravité, tel qu'il vient d'être défini, soit situé au dehors du corps lui-même, comme cela arrive notamment dans le solide appelé *tore* que produit la révolution d'un cercle autour d'un axe fixe situé dans son plan; on conçoit qu'alors le point fictif auquel est donné le nom de centre de gravité ne peut entrer dans les considérations qui vont suivre, qu'autant qu'il est supposé invariablement lié au système.

Sous cette réserve, le centre de gravité d'un corps peut encore être considéré comme un point auquel toute la masse est concentrée et auquel est appliquée une force égale et parallèle au poids; il en résulte qu'un corps pesant est nécessairement en équilibre dans toutes les positions qu'on lui donne autour de son centre de gravité, quand on rend ce centre fixe.

Enfin, quand on suspend un corps par un fil et qu'on attend que ce corps soit en équilibre, la direction du fil passe par le centre de gravité; car la tension du fil, qui agit évidemment dans la direction de celui-ci, ne peut détruire le poids du corps qu'autant qu'elle lui est égale et directement opposée et que, par conséquent, elle passe par le centre de gravité.

Si donc l'on suspend successivement un corps par deux de ses points, la rencontre des deux directions verticales du fil à travers le corps donne le centre de gravité; de là résulte un *moyen mécanique de déterminer le centre de gravité d'un corps.*

43. Lorsque la matière qui compose le corps est homogène, les volumes égaux ont des poids égaux, et si la matière de deux corps homogènes n'est pas la même, le poids est également différent pour des volumes égaux; le poids de l'unité de volume d'une substance homogène s'appelle son *poids spécifique.*

44. Quoique les surfaces et les lignes ne puissent avoir de poids, puisqu'elles ne sont que des limites et ne renferment aucune partie matérielle, on les considère néanmoins comme ayant un centre de gravité. On suppose alors qu'elles sont soumises en tous leurs points à l'action de forces parallèles qui, dans le cas de l'homogénéité, donnent des résultantes égales pour des parties équivalentes, et c'est par analogie qu'on nomme centre de gravité le centre de ces forces parallèles.

Nous ne considérerons ici que les lignes, les surfaces et les corps homogènes; réduite à ces termes, la recherche des centres de gravité n'est plus, à proprement parler, qu'une question de Géométrie, puisque les poids, réels ou fictifs, sont proportionnels aux longueurs, aux aires et aux volumes. Dans cette recherche, nous nous appuierons sur les lemmes suivants, qui sont des conséquences trop évidentes de la théorie des forces parallèles pour que nous devions entrer dans les détails de leur démonstration.

1° *Toute figure décomposable en plusieurs parties ayant toutes leur centre de gravité sur une ligne droite ou dans*

un plan donnés, a son centre de gravité sur cette droite ou dans ce plan.

2° *Toute figure symétrique par rapport à un plan ou à un axe, a son centre de gravité dans ce plan ou sur cet axe.*

3° *Toute figure qui, sans être symétrique par rapport à un plan ou à un axe, est cependant décomposable en parties qui, deux à deux, aient des poids égaux et soient tellement placées que la ligne joignant leurs centres de gravité soit partagée par ce plan ou par cet axe en deux parties égales, a elle-même son centre de gravité dans ce plan ou sur cet axe.*

4° *Toute figure qui a un centre géométrique a son centre de gravité en ce point.*

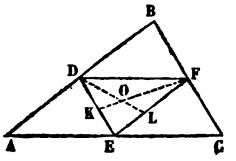
CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES.

45. Le centre de gravité d'une ligne droite de grandeur déterminée est au milieu de sa longueur; ce fait, évident par lui-même, se conclut d'ailleurs des lemmes précédents.

Pour trouver le centre de gravité d'un système de deux droites, on joint les centres de gravité, c'est-à-dire les milieux de ces droites; puis on divise la droite ainsi obtenue en parties réciproquement proportionnelles aux poids fictifs des droites, c'est-à-dire à leurs longueurs.

Pour trois ou un nombre quelconque de droites formant ou non un polygone et situées ou non dans le même plan, on détermine de même le centre de gravité, en considéran chaque droite comme un poids proportionnel à sa longueur et appliqué en son milieu, et en opérant comme pour la composition des forces parallèles.

Fig. 22.



Soit à chercher, comme exemple, le centre de gravité du contour d'un triangle ABC. Le centre de gravité des deux côtés AB, AC sera sur la ligne DE qui joint leurs milieux et en un point K tel, que l'on ait

$$KE : KD :: AB : AC.$$

D'ailleurs, les triangles ABC et DEF sont semblables, puisqu'ils ont les angles respectivement égaux; ils fournissent donc

$$AB : AC :: FE : FD.$$

Cette nouvelle proportion, combinée avec la première, donne :

$$KE : KD :: FE : FD$$

et, par suite, la ligne KF est la bissectrice de l'angle DFE.

Si l'on composait maintenant la résultante appliquée en K avec le poids du côté BC, lequel est appliqué en F, la résultante définitive serait placée quelque part sur la ligne FK, et l'on conclurait de même, par une composition faite dans un autre ordre, que le point d'application de cette résultante, ou le centre de gravité cherché, se trouve également sur la bissectrice DL de l'angle EDF; donc il se trouve à la rencontre O des deux lignes KF et DL; donc enfin *le centre de gravité du contour d'un triangle est le centre du cercle inscrit à un second triangle qu'on obtient en joignant deux à deux les milieux des côtés du premier.*

46. Le centre de gravité du contour d'un triangle équi-

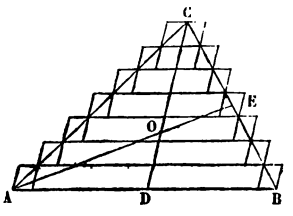
latéral, d'un carré, et, en général, d'un polygone régulier, est en son centre de figure. Il en est de même d'un rectangle et d'un parallélogramme, qui ont pour centre de figure le point de rencontre de leurs diagonales, en ce sens que toute droite passant par ce point et limitée au périmètre, y est partagée en deux portions égales. Ces propriétés sont des applications des lemmes posés à la fin du n° 44, et s'établiraient d'ailleurs sans difficulté par la méthode que nous venons d'employer pour le triangle.

On en conclut aussi que le centre de gravité du système des arêtes d'un parallélipipède quelconque est au point de rencontre de ses diagonales. Enfin, les courbes centrées, telles que le cercle, l'ellipse, etc., ont aussi leur centre de gravité en leur centre de figure (44).

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES.

47. *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est situé sur la droite qui joint un sommet quelconque au milieu du côté opposé, au tiers de la hauteur à partir de la base ou aux deux tiers à partir du sommet.*

Fig. 23.



Soit, en effet, ABC un triangle quelconque; joignons le sommet C au milieu D du côté opposé AB; partageons la surface du triangle en un grand nombre de bandes très-minces par des parallèles à la base, et, par les points où ces parallèles coupent les côtés AC, BC, menons des parallèles à CD. Nous construirons ainsi deux séries de parallélogrammes, les uns intérieurs au triangle et formant une somme d'aires moindre que celle

dudit triangle; les autres excédant et formant, par conséquent, une somme plus grande.

Or, tous ces parallélogrammes ont leurs centres de gravité sur la ligne CD (46), et chacun des deux groupes de parallélogrammes a, par conséquent, son centre de gravité sur cette même ligne. On conçoit alors que, cette vérité ne cessant pas d'exister, quelque grand que soit le nombre des parallélogrammes, elle soit encore applicable au cas où les deux groupes, qui comprennent toujours entre eux l'aire du triangle, viennent se confondre avec cette aire; par suite, on peut dire que le triangle lui-même a son centre de gravité sur la ligne CD.

Il serait tout aussi facile de faire voir que ce centre de gravité se trouve également sur la ligne AE qui joint le sommet A au milieu E du côté BC; donc il est au point d'intersection O de ces deux lignes, et la géométrie élémentaire nous apprend que ce point est réellement situé au tiers de chaque hauteur à partir de la base correspondante, ce qui prouve le théorème énoncé.

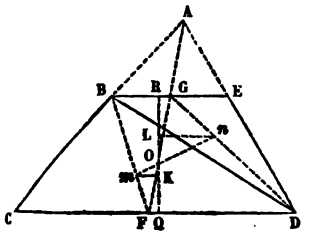
Remarque. Le centre de gravité d'un triangle est le même que celui d'un système de trois sphères égales et homogènes qui auraient leurs centres aux trois sommets. En effet, en composant les poids des sphères A et B, on aura un poids double agissant en D, et, pour composer ce poids double en D avec un poids simple en C, il faudra prendre DO égal à la moitié de OC, ce qui donne précisément le centre de gravité du triangle.

48. Dans un carré, un rectangle, un parallélogramme, un polygone régulier quelconque, un cercle, une ellipse, un parallélipipède quelconque, une sphère, le centre de gravité de la surface est au centre de figure (lemme 4°).

49. Le centre de gravité de l'aire du trapèze s'obtient facilement, quand on sait trouver celui du triangle.

Si l'on prolonge, en effet, les côtés concourants du trapèze BCDE jusqu'à leur rencontre au point A, on forme deux triangles ACD, ABE, dont la différence est le trapèze lui-même, et qui, tous deux, ont leur centre de gravité sur la droite AGF passant par le sommet commun A et par les milieux G et F des côtés parallèles. Comme dans le cas du triangle, le trapèze BCDE a aussi son centre de gravité sur la ligne GF.

Fig. 24.



Pour avoir une seconde droite qui contienne également le centre de gravité cherché et dont la rencontre avec la première détermine ce point, menons la diagonale BD et décomposons ainsi le trapèze en deux triangles BCD, BDE, dont l'un a son centre de gravité en m, au tiers de la hauteur h du trapèze, l'autre en n aux deux tiers de cette hauteur, à partir de la base inférieure; le centre de gravité du trapèze est donc aussi situé sur la droite mn, c'est-à-dire à la rencontre O de cette ligne avec GF.

Cette construction est sans doute fort simple; mais il est d'usage d'en donner une autre assez remarquable dont la démonstration ressort du calcul suivant : cherchons à exprimer, en fonction de la hauteur h du trapèze et des deux bases CD, BE, que, pour plus de simplicité, nous appellerons B et b, les distances x et y du centre de gravité O à la base inférieure et à la base supérieure. Le point O étant le point d'application de la résultante de deux forces parallèles appliquées en m et n, lesquelles forces, égales aux aires

des triangles de même hauteur BCD, BDE, sont proportionnelles aux bases B et b de ces triangles, les longueurs mO et On, ou leurs projections OK et OL sur la hauteur RQ, sont dans un rapport inverse avec ces bases, et l'on a la proportion

$$OK : OL :: b : B,$$

de laquelle il est facile de déduire celle-ci :

$$OK : OL : OK+OL \text{ ou } \frac{h}{3} :: b : B : b+B.$$

Or, de cette relation on tire successivement :

$$OK \text{ ou } x-\frac{h}{3}=\frac{h}{3}\times\frac{b}{B+b}, \text{ d'où } x=\frac{h}{3}\times\frac{2b+B}{B+b},$$

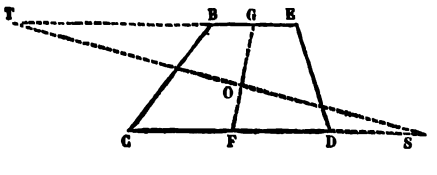
$$OL \text{ ou } y-\frac{h}{3}=\frac{h}{3}\times\frac{B}{B+b}, \text{ d'où } y=\frac{h}{3}\times\frac{2B+b}{B+b};$$

et enfin, par division,

$$\frac{x}{y}=\frac{2b+B}{2B+b}.$$

Maintenant, ce rapport étant connu et la ligne GF tracée,

Fig. 25.

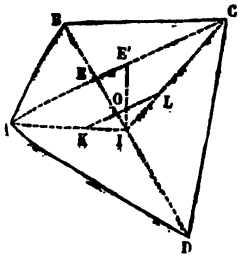


portons sur le prolongement de CD la longueur DS égale à BE ou b; puis, en sens contraire, sur le prolongement de BE, portons BT égale à CD ou B et tirons TS; le point O de rencontre de cette ligne avec GF sera le centre de gravité cherché, car on aura :

$$x : y :: OF : OG :: FS : GT :: \frac{B}{2}+b : \frac{b}{2}+B :: B+2b : b+2B.$$

50. Supposons qu'il s'agisse de trouver le centre de gra-

Fig. 26.



vité d'un quadrilatère quelconque ABCD; nous mènerons les deux diagonales AC et BD, ainsi que les droites AI et CI, qui vont des sommets A et C au point I, milieu de la diagonale BD. Le centre de gravité du triangle ABD sera en K, au tiers de AI (47) à partir du point I; celui du triangle BCD sera de même en L, et celui du quadrilatère sera par conséquent en un point O de la droite KL, point que l'on déterminera en posant

$$KO : OL :: \text{triang. BCD} : \text{triang. ABD}.$$

Or, les deux triangles BCD, ABD, ayant même base BD, sont entre eux comme leurs hauteurs ou comme les lignes CE et AE; nous avons donc, en substituant :

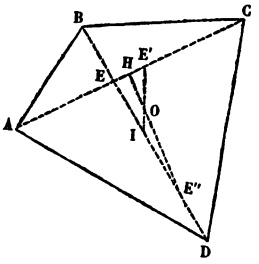
$$KO : OL :: CE : AE.$$

Si maintenant nous prenons $AE' = CE$ et que nous tirions IE', cette ligne, par son intersection avec KL, déterminera le point O; car, à cause des parallèles KL et AC, nous aurons :

$$KO : OL :: AE' : E'C :: CE : AE.$$

Cette construction peut être rendue plus symétrique en remarquant qu'on aurait pu raisonner de la même manière sur les triangles ABC et ADC qui ont pour base commune la diagonale AC, et l'on est amené à conclure que, si l'on joignait le milieu H de AC avec le point E'' pris sur BD, de façon que la longueur BE'' fût égale à DE, la ligne ainsi

Fig. 27.



obtenue contiendrait aussi le centre de gravité du quadrilatère ; de là, la construction fort simple représentée dans la figure ci-contre et exprimée ci-après : *Pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque, menez ses diagonales qui se couperont généralement en parties inégales; sur chacune d'elles, à partir d'un sommet, prenez une longueur égale à la partie qui correspond au sommet opposé; joignez le point ainsi obtenu au milieu de l'autre diagonale; les deux lignes ainsi tracées détermineront par leur intersection le centre de gravité cherché.*

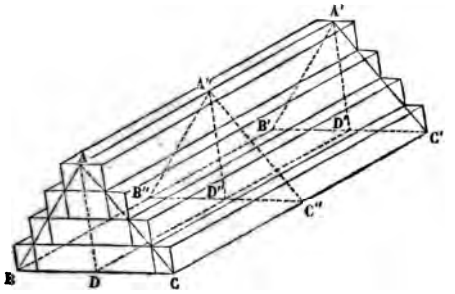
Remarque. Cette construction ne donnerait plus rien, si l'une des diagonales était coupée par l'autre en deux parties égales; mais, dans ce cas, il est facile de reconnaître que le centre de gravité se trouve sur cette dernière diagonale, au tiers de la distance qui sépare son point milieu de celui de la première.

51. Pour déterminer le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque, ou, plus généralement, d'un assemblage de figures planes et polygonales, disposées d'une manière quelconque dans l'espace, on peut remarquer qu'un semblable système est toujours décomposable en triangles, et que le problème peut ainsi toujours être ramené à trouver le centre de gravité de cette dernière figure ; il ne reste plus qu'à composer ensuite des forces parallèles dont les intensités et les points d'application sont connus.

CENTRE DE GRAVITÉ DES SOLIDES.

52. ***Le centre de gravité d'un prisme triangulaire ABCC'B'A' est au milieu de la droite qui unit les centres de gravité des deux faces triangulaires.*** Cette vérité se met facilement en lumière par une démonstration identique avec celle que nous avons exposée (47) pour le triangle; après avoir remarqué que le plan A''B''C'', mené parallèlement aux faces triangulaires du prisme, à égale distance de ces deux faces, contient le centre de gravité de ce solide (lemme 4°), on fait passer par l'une AA' des arêtes longitudinales un plan

Fig. 28.

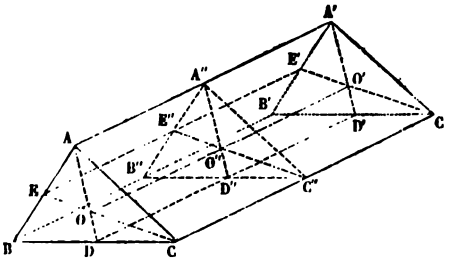


AA'D'D qui coupe en deux portions égales la face opposée BCC'B'. On suppose ensuite menés, en nombre quelconque, des plans parallèles à cette face; puis, par chacune des droites d'intersection dans les faces longitudinales, on imagine de nouveaux plans parallèles entre eux et au plan AA'D'D. Le prisme se trouve ainsi compris entre deux groupes de parallélipipèdes, les uns plus petits, les autres plus grands que la portion du prisme qui leur correspond. Ces parallélipipèdes étant tous partagés en deux parties égales par le plan AA'D'D, ont leurs centres de gravité dans ce plan; chacun des groupes a donc aussi son centre de gravité dans ledit plan, et il en est de même du prisme qui, à mesure qu'on multiplie le nombre des parallélipipèdes, se rapproche

de plus en plus de se confondre avec la somme des solides composant l'un et l'autre groupe.

Il serait aussi facile de faire voir que le centre de gravité du prisme est également dans le plan CC′E′E mené par une seconde arête longitudinale CC′ et le centre de figure E″ de la face opposée; ce point se trouve donc sur l'intersection OO′ de ce nouveau plan avec le plan AA′D′D, et il est clair que cette intersection n'est autre chose que la ligne qui joint les centres de gravité O et O′ des deux faces triangulaires. Enfin le point O″ où cette ligne perce le plan intermédiaire A″B″C″ est le centre de gravité du prisme, lequel satisfait à l'énoncé ci-dessus.

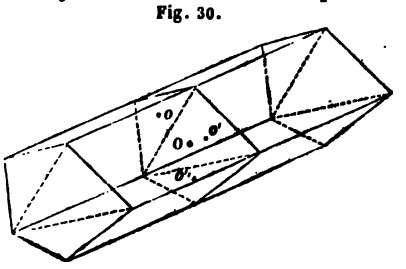
Fig. 29.



Remarque. Le centre de gravité d'un prisme triangulaire se confond avec celui de la section parallèle aux faces triangulaires menée à égale distance de ces faces.

53. Le centre de gravité d'un prisme quelconque est le même que celui de la section parallèle aux deux faces extrêmes menée à égale distance de ces deux faces. Ceci résulte de ce qu'il est facile de décomposer le prisme donné en prismes triangulaires au

Fig. 30.

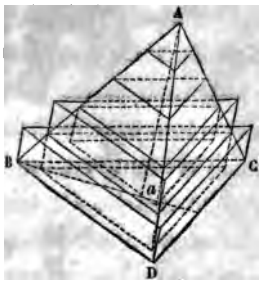


moyen de plans conduits par les arêtes longitudinales et les diagonales des faces extrêmes ; d'après la remarque qui précède, chacun de ces prismes triangulaires a son centre de gravité confondu avec celui de sa section moyenne, et, pour avoir celui du prisme, il suffit de composer des forces parallèles, appliquées respectivement aux centres de gravité o, o', o''.... des prismes triangulaires et proportionnelles aux volumes desdits prismes ou, plus simplement, aux surfaces qui leur correspondent dans la section moyenne. Or, cette composition conduit précisément au centre de gravité O de la section polygonale, lequel est, par conséquent, aussi celui du prisme donné.

***Remarque* 1.** Le centre de gravité d'un prisme quelconque se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux faces extrêmes.

***Remarque* 2.** Les mêmes énoncés s'appliquent, par la considération des limites, à un cylindre oblique à base curviligne quelconque.

Fig. 81.

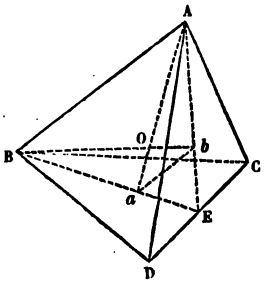


54. Soit maintenant un tétraèdre ABCD, dont on veuille déterminer le centre de gravité. Joignons le sommet A, par exemple, au centre de gravité a de la face opposée BCD ; puis, par une construction analogue à celle que nous avons appliquée au triangle (47) et au prisme triangulaire (52), menons, en nombre indéterminé, des plans parallèles à la face BCD ; nous produirons ainsi des sections triangulaires semblables qui seront, par suite, toutes percées en leurs centres de gravité par la droite Aa.

Par les sommets de ces sections menons des parallèles à A*a* et joignons deux à deux les points où chacune de ces droites perce le plan situé immédiatement au-dessus et celui qui est immédiatement au-dessous d'elle. Nous aurons ainsi formé deux groupes de prismes triangulaires, les uns tous plus petits, les autres tous plus grands que la partie du tétraèdre correspondante, et tous ces prismes auront leurs centres de gravité sur la droite A*a;* il en sera de même du tétraèdre lui-même, lequel approchera d'autant plus de se confondre avec l'une des séries de prismes que le nombre de ces prismes sera plus grand.

Il est donc prouvé, par ce qui vient d'être dit, que le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve sur l'une quelconque des droites qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée, ce qui établit suffisamment que ces quatre droites se coupent en un même point; cherchons maintenant à mieux préciser géométriquement la position de ce point : soient à cet effet *a* et *b* les centres de gravité des faces respectivement opposées aux sommets A et B; les droites B*a*E, A*b*E sont dans le même plan ABE et les droites A*a*, B*b*, qui sont également dans ce plan, s'y rencontreront en 0; c'est le point cherché. Or, tirons *ab*; les triangles AOB, *a*O*b* sont semblables, ainsi que les triangles *ab*E, ABE; on a donc

Fig. 32.



$$a0 : AO :: ab : AB$$

et $$ab : AB :: bE : AE :: 1 : 3;$$

donc aussi $$a0 : AO :: 1 : 3.$$

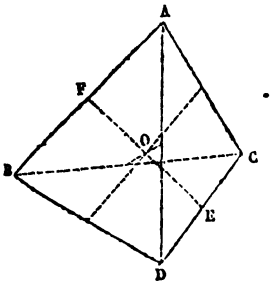
De là le théorème suivant : *Le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve à l'intersection des lignes qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée ou sur l'une quelconque de ces lignes, au quart de sa longueur à partir de la face et aux trois quarts à partir du sommet.*

Remarque. Si par le point O l'on menait un plan parallèle à la face ABC du tétraèdre, ce point serait le centre de gravité de la section déterminée par ce plan. La même propriété s'applique également à chacune des trois autres faces ABD, BCD, ACD.

55. On peut faire sur le tétraèdre une remarque analogue à celle que nous avons faite pour le triangle, c'est-à-dire que le centre de gravité de ce corps est le même que celui d'un système de quatre sphères homogènes, égales et ayant leurs centres aux quatre sommets. En effet, si l'on compose les poids des trois sphères placées aux sommets du triangle BCD, on trouvera un poids triple appliqué en *a*, et en composant ce poids triple placé en *a* avec le poids simple du sommet A, on tombera précisément sur le point O.

Remarque 1re. Les quatre poids peuvent aussi se composer d'une autre manière. On peut composer d'abord les poids appliqués aux sommets A et B en un poids double appliqué au milieu F de AB, puis les poids des sommets C et D en un poids double appliqué au milieu E de CD. Il restera alors à composer ces deux poids doubles, et ils donneront un poids quadruple appliqué au milieu O de la ligne EF. D'ailleurs, ce point O ne peut différer de celui qu'on a

Fig. 33.

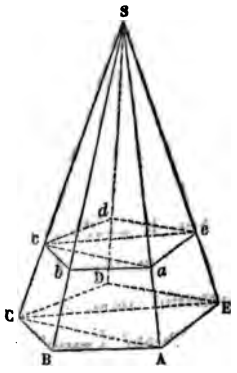


obtenu par un autre mode de composition; dont il est prouvé que *le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées.*

Remarque 2. Il résulte de ce qui précède que les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent au même point, puisque toutes trois contiennent le centre de gravité du solide. Cette circonstance établirait en effet suffisamment la vérité du théorème, si l'on n'en avait une démonstration directe et géométrique.

56. Pour trouver le centre de gravité d'une pyramide polygonale SABCDE, on décompose la base en triangles par des diagonales et l'on mène des plans par ces diagonales et le sommet S; on obtient ainsi des pyramides triangulaires dont chacune a son centre de gravité au centre de gravité de la section faite par un plan *abcde* mené parallèlement à la base au quart de la hauteur. On a donc à composer ensemble des forces parallèles ayant leurs points d'application dans ce plan et respectivement égales en intensité aux volumes des pyramides triangulaires, c'est-à-dire proportionnelles aux aires des petits triangles *eab*, *cae*, etc. Or, le point d'application de pareilles forces ne sera pas autre chose que le centre de gravité du polygone *abcde*; d'où l'on peut conclure que *le centre de gravité d'une pyramide polygonale quelconque se trouve au centre de gravité de la section menée parallèlement à sa base, aux trois quarts de la hauteur à partir du sommet*, ou, ce qui est géométriquement la même chose,

Fig. 34.



sur la ligne qui va du sommet au centre de gravité de la base, aux trois quarts de cette ligne à partir du sommet.

57. La même propriété s'applique au cône à base curviligne quelconque par l'assimilation de ce solide à une pyramide dont la base prendrait un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits.

58. Pour trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, c'est-à-dire d'un solide compris sous plusieurs faces planes, on décomposera ce polyèdre, ainsi qu'on le voit en géométrie, en un certain nombre de tétraèdres. Il suffit donc de savoir déterminer le centre de gravité de ce dernier solide, et l'opération revient ensuite à composer plusieurs forces parallèles pour chacune desquelles on connaît sa grandeur et son point d'application.

ÉQUILIBRE DE QUELQUES MACHINES SIMPLES ET COMPOSÉES.

NOTIONS SUR LE TRAVAIL DES FORCES.

59. La mesure de l'effet d'une force exige la considération de deux éléments, l'intensité de la force et le déplacement de son point d'application.

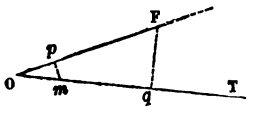
Lorsqu'une force constante de grandeur et de direction est appliquée à déplacer un corps dans cette direction, comme serait, par exemple, une force F dirigée de bas en haut pour élever uniformément un poids à une hauteur h, l'effet produit par cette force se mesure par le produit Fh de son intensité et de l'espace qu'elle a fait parcourir au corps sur lequel elle agissait.

Ce produit d'une force par le chemin que décrit son

point d'application dans la direction de la force, est ce qu'on nomme le *travail* de cette force.

Quand, sous l'action d'une ou de plusieurs forces simultanées ou par l'effet des liaisons du système, le point mobile O décrit une ligne droite OT différente de la direction de la force OF que l'on considère en particulier, on estime le travail de cette force en multipliant son intensité par la projection O*p* sur sa propre direction de l'espace O*m* parcouru par le point d'application.

Fig. 35.



Si la ligne décrite est courbe, on est forcé de restreindre la définition à une partie assez courte du mouvement, pour que le chemin élémentaire parcouru pendant ce temps puisse être, sans erreur sensible, considéré comme rectiligne ; le chemin O*m* est alors un élément commun à la courbe et à sa tangente au point O, et *le travail élémentaire*, variable en chaque point, *est* toujours *le produit de la force par la projection de l'élément du chemin que décrit son point d'application sur la direction de la force.*

Remarque. En se reportant à la figure qui précède, on peut voir qu'en projetant la force OF sur la tangente OT, on obtient deux triangles rectangles semblables O*mp*, OF*q*, lesquels fournissent la proportion

$$\mathrm{OF} : \mathrm{O}m :: \mathrm{O}q : \mathrm{O}p,$$

d'où

$$\mathrm{OF\ ou\ F} \times \mathrm{O}p = \mathrm{O}m \times \mathrm{O}q.$$

Cette égalité montre que le travail élémentaire d'une force peut aussi s'exprimer par *le produit de l'élément du chemin que parcourt son point d'application et de la projection de la force sur la direction de cet élément.*

60. Lorsque l'élément du chemin projeté sur la direction de la force tombe dans le sens de cette force, on dit que l'élément du travail, ou le travail élémentaire, est *moteur*.

Fig. 36.

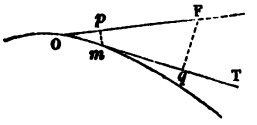
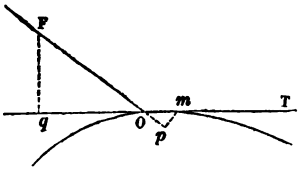


Fig. 37.



Si, au contraire, la projection de l'élément du chemin tombe dans un sens opposé à celui de la force, le travail élémentaire est dit *résistant*.

On voit qu'un caractère analogue se manifeste quand on estime le travail de la manière indiquée dans la remarque du numéro précédent; dans le cas du travail moteur, la projection de la force est en effet dans le sens du chemin parcouru et, pour le travail résistant, cette projection tombe en sens opposé.

Quand il s'agit de forces agissant dans la direction même du chemin parcouru, comme dans l'exemple cité plus haut (59), ou comme lorsqu'un cheval exerce sur une voiture un effort parallèle à la route, le travail peut, suivant les circonstances, être *moteur* ou *résistant*. Il est naturellement moteur, si la voiture avance; il serait au contraire *résistant* si, malgré les efforts de l'animal, le véhicule, placé dans une montée rapide, reculait au lieu d'avancer, ou si, dans une pente, le cheval, placé à l'arrière, exerçait un effort destiné à modérer la descente; dans le premier cas, la force et l'élément de chemin sont de même sens; dans le second, ils sont de sens opposés. Il est évident que le travail serait nul, dans le sens mécanique du mot, bien que l'effort exercé pût être considérable, si la force

verticale était uniquement employée à supporter le poids sans l'élever, ou si la voiture, retenue par un obstacle, ne cédait point aux efforts du cheval.

Enfin, un dernier cas particulier peut encore se présenter ; c'est celui où la force considérée est perpendiculaire à la direction que parcourt le mobile en vertu d'autres actions. On comprend que le travail d'une pareille force n'est ni moteur, ni résistant ; il est simplement nul, et cette conclusion correspond en effet à cette circonstance géométrique que la projection de la force sur le chemin est nulle, ainsi que celle du chemin sur la force.

61. On appelle *travail total* d'une force, dans un temps déterminé ou pour un déplacement déterminé du mobile, la *somme des travaux élémentaires* développés par cette force pendant ce temps ou pour ce déplacement.

Pour comparer facilement le travail d'une force avec celui d'une autre force, ou avec celui de la même force dans des circonstances différentes, on a dû se créer une *unité de travail ;* celle qui a été choisie représente le travail qu'il faut développer pour élever l'unité de poids à l'unité de hauteur ; c'est donc le produit du kilogramme par le mètre, et ce produit a reçu le nom de *kilogrammètre.*

De cette définition il résulte clairement que le travail d'une force, qu'il s'agisse du travail élémentaire ou du travail total, exprime toujours un nombre entier ou fractionnaire de kilogrammètres. C'est ainsi qu'une force qui, avec une intensité de 70 kilogrammes, fait parcourir 9 mètres à son point d'application, développe un travail de 70×9 ou 630 kilogrammètres.

Si la force est de $4^{kil.},60$ et le chemin de $0^{m},70$, le travail sera $4^{kil.},60 \times 0^{m},70$ ou $3^{kilgm.},22$.

62. L'expression algébrique du travail total se calcule sans aucune difficulté pour deux cas particuliers qui se rencontrent fréquemment dans les applications :

1° Quand il s'agit d'une force constante d'intensité et constamment dirigée dans le sens du chemin élémentaire parcouru, c'est-à-dire constamment tangente à la courbe décrite par le point d'application ;

2° Quand il s'agit d'une force constante, non-seulement en intensité, mais encore en direction.

Nous allons succinctement examiner ces deux cas et, pour abréger, nous désignerons en général par la notation T_F le travail total d'une force représentée par F.

Premier cas. Soient c, c', c'', c''', etc., les éléments de chemin successivement parcourus par le point d'application de la force F, et soit C le chemin total égal à la somme de tous les chemins élémentaires.

Les travaux élémentaires successifs auront pour expression

$$Fc,\ Fc',\ Fc'',\ Fc'''\ldots$$

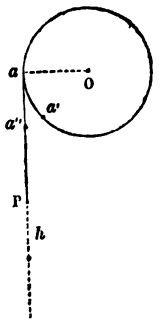
et, d'après la notation adoptée, nous aurons

$$T_F = Fc + Fc' + Fc' + Fc''' + \ldots = F(c + c' + c'' + c''' + \ldots) = FC,$$

c'est-à-dire que, *dans le cas d'une force constante et constamment dirigée dans le sens du chemin parcouru, le travail total de cette force s'obtient en multipliant son intensité par l'arc total décrit par le point d'application.*

Exemple. Lorsqu'un poids P suspendu à une corde qui s'enroule sur un cylindre à axe horizontal O, descend d'une certaine quantité h, la direction de ce poids reste tangente à un cercle qui a son centre sur l'axe et qui a pour rayon

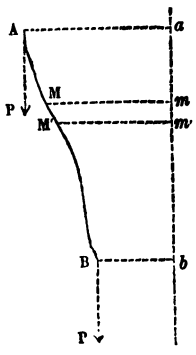
Fig. 38.



celui du cylindre augmenté de celui de la corde; le travail total de ce poids s'obtiendra donc en multipliant le poids lui-même par l'arc aa' de la circonférence compris entre les points de contact au commencement et à la fin du mouvement, lequel arc est du reste égal à la portion aa'' ou h de la corde qui s'est déroulée pendant la descente du poids; ce travail est donc exprimé par le produit Ph.

Deuxième cas. Quand la force est constante d'intensité et de direction, on peut, pour évaluer les travaux élémentaires, projeter les éléments successifs de chemin sur cette direction constante, et *le travail total de la force est* alors *le produit de cette force par la somme des projections des éléments de chemin*, c'est-à-dire par la distance comprise entre les projections des positions extrêmes du mobile.

Fig. 39.



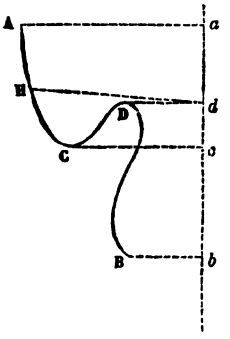
Exemple. Lorsqu'un poids P descend le long d'une courbe quelconque AB, le travail élémentaire de cette force, pendant qu'elle fait décrire au point pesant un élément quelconque MM′ de chemin, est le produit du poids P par la projection mm' de cet élément sur une verticale quelconque. Le travail total sera donc le produit dudit poids P par la projection totale ou par la distance ab.

De là ce théorème remarquable : *Lorsqu'un point pesant descend le long d'une courbe quelconque, le travail de la*

pesanteur est le produit du poids du mobile par la distance verticale dont il est descendu.

***Remarque* 1.** Cette vérité ne cesserait pas d'exister, quand la courbe serait telle que le mobile, après avoir descendu le long d'un arc AC, remontât suivant CD pour redescendre ensuite le long de l'arc DB, pourvu qu'il fût bien entendu que le travail résistant développé pendant la partie ascensionnelle du parcours vînt en déduction d'une égale part du travail moteur engendré par la descente. Cela posé, si nous menons par les points C et D des plans horizontaux dont le dernier rencontre en outre la courbe en un second point H, les arcs CH et CD seront tous deux projetés sur *cd*; le travail moteur correspondant à CH sera détruit par le travail résistant provenant de CD, et il restera, pour le travail total, les deux portions correspondantes aux arcs AH et DB, c'est-à-dire

Fig. 40.



$$P \times ad + P \times db, \text{ ou } P(ad + db), \text{ ou enfin } P \times ab.$$

***Remarque* 2.** Il résulte évidemment de ce qui précède, que *lorsqu'un point pesant, parti d'un certain plan horizontal suivant une courbe quelconque, revient à ce plan, le travail de son poids est nul,* attendu que la somme des travaux moteurs développés en descendant est précisément égale à celle des travaux résistants produits en montant.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES.

63. Le plus souvent les forces agissent sur les corps auxquels on les applique par l'intermédiaire d'autres corps appelés *machines*, lesquels sont coordonnés et assemblés de manière à transmettre plus ou moins favorablement le travail des forces.

Toute machine reçoit le mouvement d'un agent ou moteur quelconque auquel on donne le nom de *puissance;* c'est, selon les cas, ou un moteur animé, ou un cours d'eau, ou la force du vent, de la vapeur, etc.; elle reçoit des corps sur lesquels elle est destinée à agir une réaction que l'on nomme la *résistance principale*, ou simplement la *résistance*; la travail de cette force est précisément égal à l'effet utile de la machine, quand celle-ci fonctionne dans les conditions normales en vue desquelles elle a été établie. Enfin, toute machine est encore soumise à d'autres résistances, telles que les réactions des appuis qui supportent ses différentes parties, le frottement des parties mobiles, la raideur des cordes, etc.; ce sont les *résistances secondaires* ou *passives*.

64. Cela posé, supposons que la machine se meuve d'un mouvement uniforme et que, par conséquent, les diverses forces auxquelles elle est soumise se fassent mutuellement équilibre, on démontre et nous regarderons comme établi que *le travail moteur est égal à la somme des travaux de toutes les résistances*. Si donc nous désignons par T_m le travail de la puissance ou le *travail moteur*, par T_f le travail des résistances passives, parmi lesquelles il faut surtout compter le frottement, et par T_r le travail de la résistance principale, ou le *travail résistant* proprement dit, nous

pourrons poser la relation suivante qui existe à chaque instant et pour tout mouvement fini et déterminé du système :

$$T_m = T_r + T_f.$$

En mettant cette égalité sous la forme $T_r = T_m - T_f$, on constate que le travail résistant ou, si l'on veut, *le travail utile exercé par une machine est égal au travail moteur qu'elle a reçu, diminué du travail de toutes les résistances secondaires.*

De la relation qui précède on peut tirer deux conclusions très-importantes :

1° Quelque perfection que l'on apporte dans l'agencement et l'exécution des divers éléments d'une machine, il est impossible de se débarrasser complétement des résistances passives, et par conséquent le terme T_f, qui représente le travail de ces forces, n'est jamais égal à zéro ; on a donc toujours

$$T_r < T_m,$$

c'est-à-dire qu'*une machine transmet, en réalité, moins de travail qu'elle n'en a reçu* ; elle en transmet d'autant moins, que le travail des résistances secondaires est plus considérable. Les meilleures machines ne transmettent guère que les trois quarts du travail qu'elles ont reçu ; le plus grand nombre en absorbe, en pure perte, une portion bien supérieure, et il est bien essentiel de ne jamais perdre de vue l'impossibilité de construire une machine qui transmette intégralement le travail moteur ; à plus forte raison ne doit-on pas songer à lui en faire transmettre davantage.

2° Si, dans l'équation de transmission du travail

$$T_m = T_r + T_f,$$

on supposait que le terme T_r devînt nul, c'est-à-dire que, la machine travaillant à vide et n'exerçant aucune action sur les corps extérieurs, il n'y eût pas de résistance principale, il n'en faudrait pas moins exercer un certain travail moteur pour entretenir le mouvement uniforme du système, et ce travail moteur serait précisément égal au travail des résistances secondaires, lesquelles ne peuvent jamais être entièrement annulées.

Cette nécessité d'un moteur permanent dans toute machine répond péremptoirement à ceux qui, séduits par une chimérique illusion, cherchent à combiner mécaniquement des corps entre eux, de telle manière que le mouvement une fois reçu s'entretienne indéfiniment; la recherche obstinée du *mouvement perpétuel* ne méritait pas, comme on le voit, d'occuper tant de place dans les travaux d'un grand nombre d'esprits plus zélés qu'éclairés, que l'on voit encore de nos jours y épuiser leur temps et leur argent.

65. Nous allons maintenant passer en revue les six machines indiquées par le programme; dans cette étude, nous ferons complète abstraction des résistances secondaires et, au moyen de cette hypothèse plus ou moins irréalisable (64), nous n'aurons à considérer que des systèmes dans lesquels le travail moteur serait égal au travail résistant, c'est-à-dire dans lesquels la puissance ferait exactement équilibre à la résistance. Nous établirons donc, pour chacune des machines étudiées, les conditions de cet équilibre par des considérations directes, et nous montrerons que ces conditions conduisent toujours à l'égalité du travail moteur et du travail résistant, de même qu'elles sont identiques avec celles qui seraient obtenues en posant *à priori* l'égalité

$$T_m = T_r,$$

dans laquelle on exprimerait algébriquement chacun des deux termes T_m et T_r, suivant les indications des deux cas particuliers spécialement examinés au n° 62. Cette égalité sera, dans tous les systèmes que nous examinerons, de la forme

$$Pp = Qq,$$

si nous représentons par P la puissance, par Q la résistance, et respectivement par p et q les déplacements élémentaires des points d'application de ces forces, projetés sur leur propre direction. La relation fondamentale qui précède, mise sous la forme

$$P : Q :: q : p,$$

prouve d'ailleurs que, *dans toute machine, la puissance et la résistance sont en raison inverse des déplacements, estimés dans leur propre direction, des points auxquels elles sont appliquées.*

Enfin, nous rechercherons, pour chaque machine, le rapport entre les espaces que parcourent réellement les points d'application de la puissance et de la résistance, lorsque le système est mis en mouvement.

On distingue assez habituellement les machines en *machines simples* et *machines composées*.

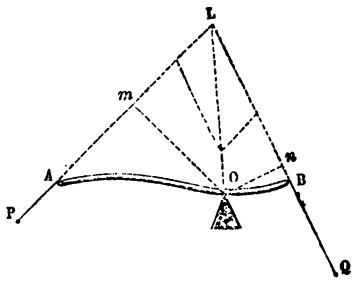
Les machines simples, qui servent d'éléments aux autres, sont au nombre de trois, classées d'après la nature de l'obstacle qui gêne et dirige leur mouvement; dans le *levier*, le corps tourne autour d'un point fixe; dans le *treuil*, tous les points tournent autour d'une droite fixe, sans s'écarter de plans parallèles entre eux; enfin, dans le *plan incliné*, le mouvement n'est autre chose qu'un glissement le long d'un plan fixe.

Les explications qui vont suivre s'appliqueront successivement, dans l'ordre établi par le programme, à chacune de ces trois machines, ainsi qu'à plusieurs autres qui s'y rattachent; ces dernières sont la *poulie*, les *mouffles* et la *vis*.

LE LEVIER.

66. On donne généralement le nom de *levier* à un corps solide, de forme quelconque, assujetti à tourner autour d'un point fixe. On lui donne habituellement toutefois la forme d'une barre AB, droite ou courbe, qui peut tourner autour d'un de ses points O qu'on nomme le *point d'appui*. Aux extrémités de cette barre sont appliquées deux forces, l'une P la puissance, l'autre Q la résistance.

Fig. 41.



Pour établir la condition d'équilibre d'une pareille machine, rappelons-nous (39) que tout système de forces appliquées à un corps peut se ramener à deux forces non réductibles à une seule et dont l'une passe par un point donné du corps.

Si le corps a un point fixe autour duquel il puisse librement tourner, on peut choisir ce point pour y appliquer l'une des deux forces auxquelles le système est réductible. Cette force sera détruite par la résistance supposée indéfinie du point fixe et, pour que le corps, soumis à la seule action de la seconde force, demeure en équilibre, il est nécessaire que cette force soit nulle d'elle-même, ou vienne

aussi passer par le point fixe pour y être composée avec la première en une résultante unique détruite par ce point. Il faut donc et il suffit, pour l'équilibre, que le système des forces données soit réductible à une résultante unique passant par le point fixe.

Appliquée au cas présent, cette condition exige, d'une part, que les deux forces P et Q soient dans un même plan avec le point d'appui O; de l'autre, que ces deux forces soient entre elles (23) dans le rapport inverse de leurs distances au point O, c'est-à-dire que l'on ait

$$P \times Om = Q \times On.$$

Il est d'ailleurs évident que les deux forces P et Q doivent agir en sens contraire sur le levier; autrement, au lieu de se détruire, leurs effets s'ajouteraient pour lui imprimer un mouvement de rotation.

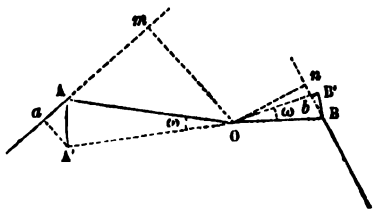
En résumé, il faut, pour l'équilibre du levier : 1° *que la puissance et la résistance soient dans un même plan avec le point fixe;* 2° *qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraires;* 3° *que leurs intensités soient dans le rapport inverse des distances de leurs directions au point d'appui, ou, en d'autres termes, dans le rapport inverse de leurs bras de levier.*

67. On voit clairement que, abstraction faite du poids propre du levier, la charge supportée par le point d'appui est précisément la résultante des deux forces concourantes P et Q. Si ces forces sont parallèles, la charge du point fixe est égale à leur somme et, si elles sont égales, comme dans la balance, cette charge est le double de l'une des deux forces.

68. Si maintenant nous supposons que la machine ait

subi un petit mouvement angulaire ω, les points d'application A et B auront parcouru les petits arcs AA′, BB′ qui, ainsi que l'enseigne la géométrie élémentaire, seront respectivement exprimés par $AO \times \omega$, $BO \times \omega$, et se confondront sensiblement avec les perpendiculaires élevées en A et B aux lignes AO et BO. Soient alors Aa et Bb les projections respectives de ces déplacements sur les directions des forces; le travail de la puissance P ou le travail moteur sera exprimé par $P \times Aa$ et le travail résistant par $Q \times Bb$.

Fig. 42.



Or, les deux angles aAA', AOm ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, les triangles rectangles dont ils font partie sont semblables et donnent

$$Aa : AA' \text{ ou } AO \times \omega :: Om : AO, \text{ d'où } Om = \frac{Aa}{\omega}.$$

On obtiendrait de la même manière $On = \frac{Bb}{\omega}$, et ces quantités, substituées dans la relation d'équilibre

$$P \times Om = Q \times On,$$

conduisent à

$$P \times \frac{Aa}{\omega} = Q \times \frac{Bb}{\omega},$$

ou

$$P \times Aa = Q \times Bb,$$

c'est-à-dire à l'égalité du travail moteur et du travail résistant.

Inversement, si nous admettions comme démontrée l'égalité $P \times Aa = Q \times Bb$, nous remonterions facilement aux conditions d'équilibre en y remplaçant les quantités Aa, Bb

par leurs valeurs respectives $Om \times \omega$, $On \times \omega$, calculées comme ci-dessus, et il viendrait

$$P \times Om \times \omega = Q \times On \times \omega \text{ ou } P \times Om = Q \times On.$$

Remarque. On peut observer encore dans ce qui précède que

$$AA' : BB' :: AO : BO;$$

d'où il suit que les espaces parcourus par les points d'application des forces sont entre eux comme les distances de ces points d'application au point fixe. Quant aux déplacements estimés dans la direction des forces, l'équation du travail montre qu'ils sont en raison inverse des intensités de ces forces ou dans le rapport direct de leurs bras de levier Om et On.

69. Les figures ci-dessus supposent le point d'appui placé entre la puissance et la résistance; cette disposition constitue le levier du *premier genre*.

Fig. 43.

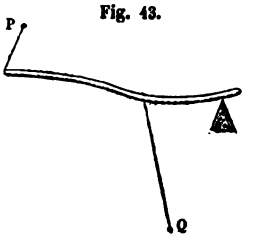
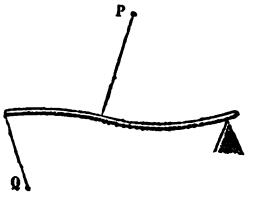


Fig. 44.



Dans le levier du *second genre*, la résistance est entre le point fixe et la puissance; enfin, dans celui du *troisième genre*, la puissance est appliquée entre le point fixe et la résistance.

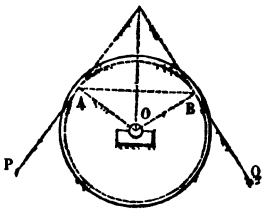
Nous indiquons ces dénominations parce qu'elles sont assez usitées; mais elles n'ont aucune influence sur les conditions d'équilibre, qui sont les mêmes dans les trois cas; nous nous bornerons à citer, comme exemples

du levier du premier genre, la *balance*, la *pince en fer coudée*, le *mouvement de sonnette*, les *ciseaux* et *tenailles*, etc.; comme exemples du second genre, la *pince droite*, la *brouette*, etc.; enfin, comme leviers du troisième genre, la *pincette*, la *pédale* dont on fait usage dans diverses professions, etc.

LA POULIE.

70. Une poulie consiste essentiellement en une roue mobile autour d'un axe qui la traverse en son centre et qui repose par ses extrémités ou *tourillons* sur deux appuis; elle présente sur sa tranche une rainure ou *gorge* qui reçoit une corde; cette corde enroulée sur un arc plus ou moins étendu de la circonférence, s'en détache tangentiellement et est tirée à ses deux extrémités par les forces P et Q, dont l'une est la puissance, l'autre la résistance. Ces deux forces sont évidemment dans les mêmes conditions, au moment de l'équilibre, que si elles étaient appliquées aux deux extrémités d'un levier coudé AOB dont le point fixe serait au centre de la poulie; et un pareil levier, dont les bras OA, OB sont égaux, ne saurait être en équilibre, à moins que l'on n'ait P=Q. La seule condition d'*équilibre de la poulie* est donc que *la puissance soit égale à la résistance*.

Fig. 45.



71. Abstraction faite du poids de la poulie, la pression π exercée sur l'axe de la poulie est la résultante des deux forces égales P et Q, laquelle passe nécessairement au

centre O; or, nous avons vu (23) que cette résultante satisfaisait à la relation

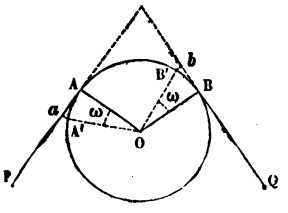
$$\pi : P :: AB : AO,$$

ce qui montre que *la pression sur l'axe est à la force qui tend le cordon comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.*

La pression sera au maximum lorsque la sous-tendante elle-même sera la plus grande possible, c'est-à-dire lorsqu'elle sera égale au diamètre; les cordons seront alors parallèles et la charge sur l'axe sera double de la tension du cordon. Il est inutile d'ajouter que cette pression se répartit par moitié sur chacun des appuis des tourillons, si la poulie est placée au milieu de la distance qui les sépare.

72. Si la poulie subit un mouvement angulaire ω, les arcs AA′, BB′ seront égaux et se projetteront sur leurs forces respectives suivant des longueurs égales Aa, Bb; comme, d'ailleurs, l'équilibre exige que la force P soit égale à la force Q, on peut écrire indifféremment

Fig. 46.



$$P \times AA' = Q \times BB' \text{ ou } P \times Aa = Q \times Bb.$$

C'est la relation de l'égalité du travail moteur et du travail résistant, laquelle conduirait également à $P = Q$, si nous la supposions primitivement établie. Nous aurions pu, d'ailleurs, écrire aussi cette relation en regardant la question présente comme une application du premier cas examiné dans le n° 61, et il est bon de remarquer que l'égalité des travaux des deux forces existe aussi bien quand on

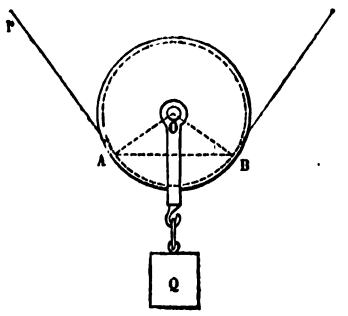
considère le travail total des forces pendant un mouvement fini ω de la poulie, que lorsqu'il s'agit seulement d'une variation élémentaire.

Remarque. Les déplacements des points d'application des forces, mesurés soit sur la poulie, soit sur le cordon, étant égaux entre eux, ils satisfont encore, comme cas particulier, à la loi du rapport inverse des intensités des forces.

73. Le plus souvent la poulie est *fixe*, en ce sens qu'elle est assise par ses tourillons, ou sur deux appuis immobiles, ou sur les deux branches d'une chape attachée à un point fixe, comme l'indique la figure ci-contre; quelquefois elle est *mobile* et portée par la corde elle-même dont un bout est alors attaché à un point fixe. Dans ce dernier cas, la résistance Q est appliquée à la chape, laquelle tourne de manière à se diriger, pour l'équilibre, suivant la direction de la résultante des deux tensions égales P du cordon, c'est-à-dire suivant la bissectrice de leur angle, et, comme on l'a vu (16), la force Q est alors égale à ladite résultante; on doit donc avoir :

Fig. 47.

Fig. 48.



$$P : Q :: AO : AB.$$

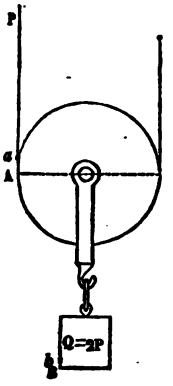
La condition d'équilibre de la poulie mobile peut, par suite, s'énoncer ainsi : *La puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

On voit facilement, par cette proportion, que plus la sous-tendante sera grande, plus la résistance pourra être considérable relativement à la puissance; le cas le plus favorable à l'emploi de la poulie mobile est donc celui où les deux cordons peuvent être parallèles; la puissance n'est alors que la moitié de la résistance.

Ajoutons que la puissance est précisément égale à la résistance, si la sous-tendante est égale au rayon, c'est-à-dire si l'arc embrassé par la corde est de 60°.

74. La poulie mobile se déplace par un mouvement de translation, en même temps qu'elle éprouve, par rapport à la direction des forces, un mouvement de rotation et, les lois géométriques de ce double mouvement n'étant pas censées à la portée de la plupart des lecteurs auxquels cet ouvrage est spécialement destiné, nous ne pouvons introduire ici la démonstration du principe du travail des forces sur une poulie mobile quelconque; nous nous bornerons au cas simple où, les deux cordons étant parallèles, la puissance tient en équilibre une résistance double, laquelle suit alors une direction rectiligne équidistante des deux cordons. Or, il est évident que, dans un tel système, quand le point d'application A de la puissance parcourt l'élément Aa de sa direction, cette longueur est prise par égale part sur chacun des deux cordons, et la résistance ne se déplace, par conséquent, que d'une distance Bb égale à la moitié de Aa.

Fig. 49.



La relation

$$P \times Aa = Q \times Bb$$

est donc constamment satisfaite, puisque l'on a toujours en même temps

$$P=\frac{1}{2}Q \text{ et } Aa=2Bb.$$

Il est tout à fait inutile de dire que, si l'on admettait comme démontrée *à priori* l'égalité qui précède, l'introduction de la valeur de Aa en ferait de suite ressortir, comme relation conditionnelle d'équilibre, $P=\frac{1}{2}Q$.

LE PLAN INCLINÉ.

75. Cette machine consiste simplement en un plan fixe sur lequel se meut un corps solide soumis à des forces quelconques, ou par la résistance duquel l'équilibre se trouve établi; nous allons chercher les relations qui doivent exister entre ces forces et l'inclinaison du plan pour que cette dernière condition soit remplie.

Remarquons d'abord qu'en chacun des points de contact, le plan supposé parfaitement poli, c'est-à-dire n'exerçant aucun frottement, résiste dans une direction qui lui est normale; l'action totale du plan est donc la résultante de plusieurs forces parallèles; elle est égale à leur somme et, comme elles, normale à ce plan. Cette résultante doit détruire l'action de toutes les forces données, y compris le poids du corps, s'il est supposé pesant; celles-ci doivent donc être réductibles à une force unique, normale au plan et tendant à appuyer le corps sur ce plan.

De plus, il faut que ces deux résultantes normales, provenant l'une de la résistance du plan, l'autre des forces appliquées au corps, se détruisent et soient, par conséquent,

directement opposées. Si donc le corps ne s'appuie que par un seul point sur le plan, il est nécessaire et il suffit que la résultante des forces données soit normale au plan et passe par le point de contact.

Si le corps s'appuie par deux points, il faut que cette résultante perce le plan sur un des points de la droite qui unit les deux premiers; s'il y a trois points de contact non situés en ligne droite, il faudra que la résultante normale rencontre le plan dans l'intérieur du triangle formé par ces trois points, et, dans ces deux cas, la pression en chaque point se déterminera comme il a été expliqué aux nos 35 et 36 pour la décomposition d'une force en d'autres appliquées parallèlement en des points déterminés. Enfin, s'il existe plus de trois points d'appui, la résultante devra toujours passer dans le polygone convexe formé par la jonction rectiligne des points extérieurs, polygone que, pour abréger, nous conviendrons d'appeler *polygone de contact;* mais on a vu que les pressions en chaque point de contact resteraient théoriquement indéterminées.

76. Nous bornerons ici notre examen au cas particulier où deux forces seulement sont appliquées au corps solide. Pour que ces deux forces puissent avoir une résultante unique, il faut qu'elles soient dans un même plan, et pour que cette résultante soit normale au plan fixe, il est nécessaire qu'elle soit elle-même avec ses deux composantes dans un plan normal audit plan fixe; de là le théorème suivant :

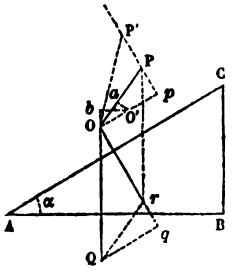
Lorsqu'un corps appuyé contre un plan fixe est sollicité par deux forces, il faut, pour l'équilibre, que ces deux forces se trouvent dans un même plan perpendiculaire au plan donné et qu'elles donnent lieu à une résultante unique, nor-

male à ce dernier plan et le rencontrant dans l'intérieur du polygone de contact.

77. Supposons maintenant, pour particulariser encore davantage, que l'une des deux forces appliquées au corps soit son poids Q et que ce corps soit placé sur un plan incliné; ce poids Q représentera la résistance, et soit P la force ou la puissance qui doit établir l'équilibre.

Le plan de ces deux forces P et Q est à la fois vertical, puisqu'il contient la force Q, et normal au plan incliné par la raison ci-dessus indiquée. Étant ainsi perpendiculaire au plan horizontal et au plan incliné, le plan des forces du système sera perpendiculaire à leur intersection et contiendra l'angle qui mesure l'inclinaison α du plan donné sur l'horizon; c'est le plan de la figure ci-contre. Soit donc O le point de concours de la puissance P et de la résistance verticale Q; ces deux forces composées par la règle du parallélogramme devront, comme précédemment, donner une résultante normale au plan et tombant dans l'intérieur du polygone de contact. Or, si du sommet Q nous abaissons Qq perpendiculaire sur la diagonale Or, le triangle QOq ainsi obtenu sera semblable au triangle ABC, puisque l'angle QOq ne diffère pas de l'angle α aux côtés duquel les siens sont respectivement perpendiculaires; nous aurons donc

Fig. 50.



$$Qq : OQ \text{ ou } Q :: BC : AC;$$

mais Qq n'est autre chose que la projection Op de la puissance P sur le plan incliné, et la condition d'équilibre par-

liculière à ce cas peut, par conséquent, s'énoncer ainsi : *Pour qu'il y ait équilibre entre le poids d'un corps placé sur un plan incliné et une autre force qui sollicite ce corps, il faut que la projection de la puissance sur le plan soit à la résistance comme la hauteur dudit plan est à sa longueur.*

Remarque. Il est à observer que la condition ci-dessus serait identiquement la même pour toute autre force OP′ qui aurait même projection Op que la force P.

78. On peut distinguer le cas où la puissance P est parallèle au plan incliné et celui où elle est horizontale.

Dans le premier, la projection de la puissance P sur le plan incliné est égale à cette force elle-même, et, comme le démontrerait d'ailleurs directement la similitude des triangles QOr et ABC, l'énoncé précédent devient : *Pour l'équilibre entre le poids d'un corps placé sur un plan incliné et une force qui sollicite ce corps parallèlement audit plan, il faut que la puissance soit à la résistance comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

Fig. 51.

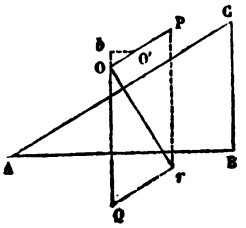
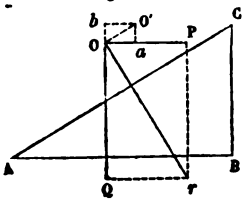


Fig. 52.



Dans le deuxième cas, les mêmes triangles QOr et ABC donnent

$$Qr : QO :: BC : AB,$$

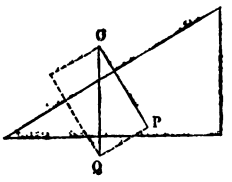
ou, *la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan incliné est à sa base.*

Remarque. La pression sur le plan, ou la résultante Or, est égale à $\sqrt{Q^2-P^2}$ dans le cas d'une puissance parallèle au plan et à $\sqrt{P^2+Q^2}$ dans celui d'une puissance horizontale.

79. Si, dans l'hypothèse d'une puissance horizontale, nous supposions que le plan incliné se relevât jusqu'à devenir vertical, sa base AB deviendrait nulle et le rapport de la puissance à la résistance serait infini; ce qui prouve que, abstraction faite du frottement, il n'y a pas de force horizontale finie qui soit capable de maintenir un corps pesant contre un plan vertical.

Plus généralement, on ne peut, avec une force normale P, quelque grande qu'elle soit, retenir un corps pesant sur un plan incliné parfaitement poli. Le poids Q du corps peut en effet être décomposé en deux forces: l'une, normale au plan et qui est détruite, ainsi que la force P elle-même, par la résistance dudit plan; l'autre, parallèle à ce plan et qui obtient son effet. On voit donc que l'équilibre ne peut en général avoir lieu que si la force P, au lieu d'être normale, est inclinée de manière à donner une composante parallèle au plan pour détruire celle du poids du corps. Nous répétons que l'existence du frottement et d'une inévitable déformation au contact des corps, vient seule donner un démenti apparent à ce résultat de la théorie.

Fig. 53.



80. Nous allons maintenant reprendre un à un le cas général et les deux cas particuliers ci-dessus examinés, pour établir directement sur chacun d'eux l'égalité du travail moteur et du travail résistant.

Soient (77), dans le cas d'une force P quelconque, OO'

un déplacement du corps parallèlement au plan incliné, et Oa, Ob les projections de ce déplacement sur les directions des forces P et Q; les triangles rectangles semblables OaO', OPp donneront

$$OP \text{ ou } P : OO' :: Op : Oa,$$

et, par la même raison, les triangles ObO', OQq fourniront

$$OQ \text{ ou } Q : OO' :: Qq \text{ ou } Op : Ob.$$

Ces deux proportions ont les mêmes moyens et leurs extrêmes donnent la nouvelle proportion

$$P : Q :: Ob : Oa,$$

ou

$$P \times Oa = Q \times Ob,$$

ce que nous voulions démontrer.

Inversement, pour passer de cette égalité à la condition d'équilibre, il suffit de remarquer que la seconde des proportions qui précèdent donne

$$Op : Q :: Ob : OO',$$

et que les triangles semblables ObO', ABC fournissent également la proportion

$$Ob : OO' :: BC : AC;$$

on a, par conséquent,

$$Op : Q :: BC : AC;$$

c'est la condition exprimée plus haut.

81. La direction de la force P étant quelconque dans le numéro qui précède, le principe dont il s'agit se trouve ainsi

démontré généralement; mais, pour répondre plus directement au but spécial de cet ouvrage, nous allons répéter sur les deux cas particuliers la démonstration qui se simplifie considérablement, comme on va le voir.

Dans le premier (78), le déplacement a lieu sur la force P elle-même, et il suffit d'établir que l'on a

$$P \times OO' = Q \times Ob.$$

Or, d'un côté, la condition d'équilibre fournit

$$P : Q :: BC : AC;$$

de l'autre, les triangles semblables ABC, ObO' donnent

$$BC : AC :: Ob : OO',$$

et de l'ensemble de ces deux proportions on conclut immédiatement l'égalité posée.

Inversement, ladite égalité et la deuxième proportion conduisent directement à la première, c'est-à-dire à la condition d'équilibre.

Dans le deuxième cas, la puissance est horizontale et la condition d'équilibre est exprimée par

$$P : Q :: BC : AB.$$

Or, les triangles semblables ABC, OaO' fournissent

$$BC : AB :: O'a \text{ ou } Ob : Oa;$$

par conséquent, on obtient encore

$$P : Q :: Ob : Oa,$$

ou

$$P \times Oa = Q \times Ob,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est aussi facile, dans ce cas que dans les précédents, de remonter de la troisième proportion ci-dessus à la première qui exprime la condition d'équilibre.

Remarque. Le point d'application de la puissance se confondant avec celui de la résistance, le rapport entre les espaces parcourus par ces deux points est toujours l'unité. Il en serait d'ailleurs encore ainsi, quand même ces deux points ne coïncideraient pas, puisque tous les points du corps se meuvent parallèlement à eux-mêmes et en ligne droite sur le plan incliné.

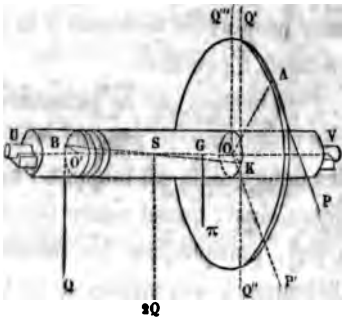
LE TREUIL.

82. Le treuil se compose d'un cylindre ordinairement horizontal, perpendiculairement à l'axe duquel est montée une roue solidaire avec lui. Il se termine de part et d'autre par des cylindres de même axe que lui, mais d'un plus petit diamètre et appelés *tourillons;* c'est par ces tourillons que la machine repose sur ses appuis ou *coussinets*, et le seul mouvement qu'elle est censée pouvoir prendre est un mouvement de rotation autour de l'axe commun.

Une corde fixée par un bout au cylindre reçoit, à l'autre bout, l'action d'une résistance qui peut être, par exemple, un poids Q à élever; une force motrice ou puissance P, agissant tangentiellement à la roue par le moyen d'une corde, d'un système de chevilles ou d'une manivelle, doit faire équilibre au poids, ou bien l'élever en faisant tourner le treuil autour de son axe.

Soit O le centre de cette roue et de l'intersection de son plan avec le cylindre, O′ le centre d'une autre section faite dans le cylindre perpendiculairement à son axe par

Fig. 64.



la verticale du cordon qui tient à la résistance ; dans le plan horizontal passant par l'axe de la machine, traçons les deux rayons de sens contraires OK, O'B et tirons KB qui rencontre l'axe au milieu S de OO'.

Au point K appliquons en sens contraires deux forces Q', Q'' égales et parallèles à Q ; l'équilibre, s'il existe, n'en sera nullement troublé et pourra être considéré comme établi de la manière suivante entre les quatre forces P, Q, Q' et Q''. Les deux forces Q et Q'', égales, parallèles et de même sens, auront une résultante 2Q appliquée en S et détruite par la résistance de l'axe. Resteront à considérer les deux forces P et Q', agissant dans un même plan où se trouve également un point fixe O. Comme dans le cas de la poulie, ce système partiel peut être assimilé à un levier coudé et, en raison de ce que les bras sont inégaux, l'équilibre des deux forces, c'est-à-dire l'équilibre de la machine elle-même, exige que l'on ait la relation

$$P \times OA = Q' \times OK.$$

Mais Q' n'est autre chose que Q, et si nous désignons respectivement par R et r les rayons de la roue et du cylindre, la condition d'équilibre, qui deviendra

$$P \times R = Q \times r,$$

pourra s'énoncer ainsi : *pour l'équilibre du treuil, il faut*

que la puissance soit à la résistance comme le rayon du cylindre est à celui de la roue.

Remarque. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les cordes enroulées sur le cylindre et sur la roue étaient infiniment déliées; mais les cordes sont toujours d'un diamètre fini dont il faut, pour plus d'exactitude, ajouter la moitié aux rayons R et r dans la condition d'équilibre. Cette relation deviendra donc, si l'on désigne par ρ le rayon de la corde de la roue, et par ρ' celui de la corde du cylindre,

$$P(R+\rho)=Q(r+\rho').$$

83. Les forces qui, en des points différents, exercent des pressions sur l'axe du treuil sont : 1° la force verticale 2Q, appliquée au milieu S de la distance OO′ qui sépare la roue du point d'application de la résistance; 2° les deux forces P et Q′, dont la résultante passe nécessairement au point O et qui peuvent, par conséquent, être considérées comme transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point, suivant OP′ et OQ″.

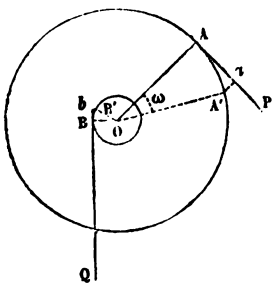
Or, la force 2Q appliquée en S peut se décomposer en deux forces Q appliquées chacune en l'un des points O et O′; la première de celles-ci sera égale et directement opposée à la force Q′ que nous y avons transportée, et ces deux forces se détruiront; il ne restera donc plus que les deux forces P et Q transportées sur l'axe parallèlement à elles-mêmes et dans leurs plans perpendiculaires respectifs.

Si l'on veut avoir égard au poids π de l'appareil, il faut considérer que ce poids représente encore une force verticale appliquée en un point G de l'axe; enfin, pour obtenir les pressions individuelles sur les deux appuis U et V, il

faudra décomposer chacune des trois forces P, Q, π en deux autres parallèles passant par ces deux points, et la résultante faite en chaque appui avec ces trois nouvelles composantes représentera la pression qu'il supporte.

84. Faisons subir maintenant au treuil en équilibre un petit déplacement angulaire ω, et projetons sur les directions des forces P et Q les arcs élémentaires AA′, BB′ parcourus par les points d'application, lesquels arcs sont d'ailleurs entre eux comme les rayons R, r et respectivement exprimés par ωR, ωr.

Fig. 55.



Les quadrilatères OAaA′, OBbB′ qui ont leurs angles égaux chacun à chacun et pareillement disposés, sont semblables, et par suite aussi les triangles AA′a, BB′b qui donnent

$$Aa : Bb :: AA' \text{ ou } \omega R : BB' \text{ ou } \omega r :: R : r.$$

D'un autre côté, l'équilibre exige que l'on ait

$$P : Q :: r : R;$$

on a donc $$P : Q :: Bb : Aa,$$

ou $$P \times Aa = Q \times Bb;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, de cette dernière relation supposée démontrée et de la première proportion, on déduit la seconde comme condition d'équilibre.

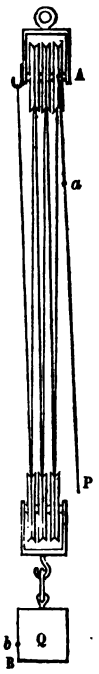
Remarque. Les valeurs de AA′ et BB′ font voir que les déplacements des points d'application sont entre eux comme

les rayons R, r, et, par suite, en raison inverse des intensités des forces qui y sont appliquées.

LES MOUFLES.

85. On donne le nom de *moufle* à un système de plusieurs poulies égales réunies dans une chape commune sur le même axe; sa mise en œuvre s'effectue au moyen de deux systèmes analogues; l'un fixé, comme une poulie simple, par sa chape; l'autre, mobile et relié au premier par un cordon dont une extrémité est attachée à l'une des chapes, ordinairement celle du moufle fixe, ainsi que le représente la figure ci-contre, et qui passe successivement sur toutes les poulies, pour recevoir, à sa seconde extrémité, l'action de la puissance P; au crochet de la chape mobile est appliquée la résistance Q, laquelle est généralement un poids à soulever.

Fig. 56.



Si l'on suppose que l'appareil entier comporte un nombre n de poulies et, ce qui doit avoir toujours lieu d'une manière sensible, que les cordons de suspension soient tous parallèles, ces derniers, en nombre n, auront tous la même tension P imprimée par la puissance et transmise par chaque poulie (70); la résistance Q sera donc en réalité soutenue, dans l'état d'équilibre, par n forces égales à cette tension, et l'on aura la relation

$$Q = nP,$$

qui exprime que *la puissance est à la résistance comme l'unité est au nombre de cordons qui vont d'un moufle à l'autre.*

Quelquefois, mais beaucoup plus rarement, les poulies d'un même moufle sont disposées sur la même chape, les unes à la suite des autres et sur des axes différents; cette disposition, qui exige que les poulies soient de différents diamètres, pour conserver autant que possible le parallélisme des deux cordons qui embrassent chacune d'elles, ne change rien à ce que nous venons de dire, puisque la condition d'équilibre ne dépend pas de la longueur des cordons, mais seulement de leur tension.

86. L'effort que supporte le point fixe auquel est attaché le système de moufles est évidemment égal, comme dans la poulie simple et abstraction faite du poids propre π de la machine, à la résultante de la puissance P et de la résistance Q ou nP.

Lorsque les directions de ces deux forces sont sensiblement parallèles, leur résultante est égale à leur somme

$$P+nP, \text{ ou } (n+1)P,$$

et si toutes deux sont verticales, la charge totale du point fixe est exprimée par

$$\pi+(n+1)P.$$

87. Pour démontrer que, dans cette machine, le travail moteur est égal au travail résistant, nous supposerons que la résistance Q ait marché d'une longueur Bb sur la direction rectiligne dans laquelle cette force agit; ce mouvement n'a pu avoir lieu que par un raccourcissement de la même quantité de chacun des n cordons, raccourcissement qui a nécessairement eu pour effet un allongement du cordon de la

puissance égal à la somme des raccourcissements partiels; si donc le point A de ce cordon a marché de A en a, nous aurons

$$A\dot{a} = n \times B\dot{b},$$

et, comme on a déjà pour l'équilibre

$$nP = Q,$$

il en résulte $P \times A\dot{a} = Q \times B\dot{b}$, c. q. f. d.

Inversement, la première et la dernière de ces trois égalités conduiraient à la seconde, c'est-à-dire à la relation d'équilibre.

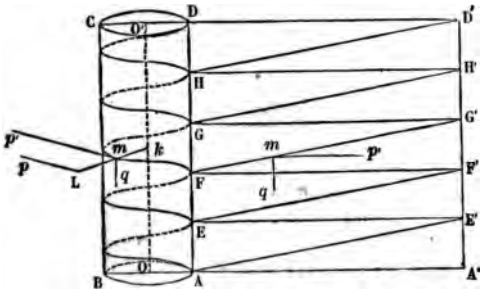
Remarque. Les espaces $A\dot{a}$, $B\dot{b}$ parcourus par les points d'application sont entre eux dans le rapport inverse des forces correspondantes; cela résulte directement de la dernière des relations qui précèdent.

LA VIS.

88. Une *vis* est formée d'un noyau cylindrique sur lequel s'enroule une saillie à laquelle on donne le nom de *filet*. Il est, avant tout, nécessaire de donner de la forme et de la position de cette saillie une description rigoureuse.

Soient ABCD un cylindre circulaire droit; OO′ son axe; OA son rayon, que nous désignerons par r; développons, à partir de l'arête AD, la surface du cylindre suivant le rectangle AA′D′D, et divisons AD en un nombre quelconque de parties égales; par les points de divisions menons les lignes EE′, FF′, etc., parallèles à AA′, et enfin les diagonales AE′, EF′, FG′, etc., des rectangles ainsi obtenus.

Fig. 57.



Si maintenant nous enroulons de nouveau le rectangle AD′ sur le cylindre, chacune des diagonales formera une portion appelée *spire* d'une courbe continue qui porte le nom d'*hélice*; la distance constante qui sépare les extrémités d'une même spire ou la hauteur d'un des rectangles générateurs s'appelle le *pas* de l'hélice; désignons-le par h.

D'après sa génération, l'hélice a nécessairement tous ses éléments également inclinés sur le plan de la base du cylindre, et cette inclinaison n'est autre chose que l'angle A′AE′ de l'un des triangles rectangles qui ont pour côtés de l'angle droit le pas h de l'hélice et le développement AA′ ou $2\pi r$.

Cela posé, pour simplifier le discours, supposons que le cylindre soit vertical et cherchons d'abord la condition d'équilibre d'un point matériel m placé sur l'hélice et sollicité d'une part par une force verticale q, d'autre part par une force horizontale p, agissant à l'extrémité L du rayon km prolongé et perpendiculairement à ce rayon; soit enfin $k\mathrm{L}=\mathrm{R}$.

Nous pouvons d'abord remplacer la force p par une force p', parallèle à la première et appliquée au point m lui-même, pourvu que, d'après les conditions de l'équilibre du levier, nous déterminions cette force nouvelle par la relation

$$p \times kL = p' \times km, \text{ ou } pR = p'r,$$

d'où $$p' = p\frac{R}{r}.$$

Le point m se trouve d'ailleurs dans les mêmes conditions que s'il était placé sur le plan incliné FG′ et sollicité à la fois par la force verticale q et par la force horizontale p'. Or, on a vu (78) qu'il fallait, dans ce cas, que la force horizontale fût à la force verticale comme la hauteur du plan incliné est à sa base, et cette condition se traduit pour nous par la proportion

$$p' \text{ ou } p\frac{R}{r} : q :: h : 2\pi r,$$

laquelle équivaut à celle-ci :

$$p : q :: h : 2\pi R.$$

Ce résultat signifie que, *pour qu'un point, placé sur une hélice,* dans les conditions ci-dessus, *soit en équilibre, il faut que la puissance horizontale soit à la résistance verticale comme le pas de l'hélice est à la longueur de la circonférence que tend à décrire la puissance.*

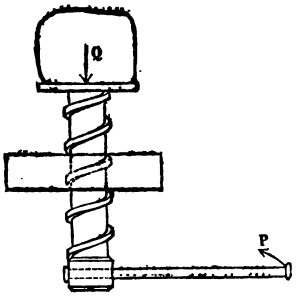
Observons, en passant, que le rayon r du cylindre n'entre plus dans cette dernière proportion; on aura donc toujours le même rapport entre la puissance et la résistance, quel que soit le cylindre sur lequel l'hélice soit tracée, pourvu que le pas de l'hélice reste le même, ainsi que le bras de levier de la puissance. Il ne faut, en outre, pas perdre de vue que ce n'est que pour plus de commodité dans le langage que nous avons supposé le cylindre vertical; tout ce qui vient d'être dit et tout ce que nous allons dire encore sur ce sujet doit s'entendre en général d'une force parallèle

à l'axe du cylindre et d'une autre agissant dans un plan perpendiculaire à cet axe.

89. Concevons maintenant qu'un carré ou un rectangle, ayant l'un de ses côtés confondu avec une génératrice du cylindre et l'un des points de ce côté, son milieu, par exemple, appliqué sur l'hélice, descende ou monte le long de la surface, de manière que son plan contienne toujours l'axe et que le point en question décrive la courbe ; il est évident que, dans ce mouvement, tous les points de l'aire du rectangle décriront des hélices de même pas, de même axe, mais de rayons différents. Quoi qu'il en soit, nous aurons engendré le filet d'une vis dont le *pas* sera le pas commun à toutes les hélices.

Imaginons enfin une seconde pièce solide, présentant exactement en creux la forme que la première offre en relief; ce sera l'*écrou* de la vis ; celle-ci pourra y pénétrer exactement et s'y mouvoir d'un double mouvement de rotation autour de son axe et de translation dans le sens de cet axe. Réciproquement, si c'est la vis qui est fixe, l'écrou pourra cheminer le long de l'axe en tournant en même temps autour de lui, et il s'avancera, à chaque tour entier, d'une quantité égale au pas de la vis.

Fig. 58.



90. Pour fixer les idées, nous allons supposer que l'écrou soit immobile et que la vis elle-même soit sollicitée, 1° par une force horizontale P qui agit dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis et qui tend à la faire monter; 2° par une force verticale Q qui, comme ferait un poids à

soulever, tend à s'opposer à son ascension. Soit toujours (fig. 57) $kL=R$ la perpendiculaire abaissée de l'axe sur la direction de la force P, dans le plan horizontal qui la contient.

Cela posé, on comprend que l'action des forces P et Q se fait sentir exclusivement sur chacun des éléments de la surface inférieure du filet de la vis, lesquels seuls s'appuient sur l'écrou.

Soient donc m, m', m'', etc., les divers éléments de contact;
q, q', q'', etc., les composantes ou parties de la force Q qui y sont respectivement appliquées;
enfin p, p', p'', etc., les éléments de la force P divisée au point L en autant de parties qu'il y a d'éléments de contact.

Pour chacun de ces éléments, quelle que soit sa distance à l'axe, nous aurons la relation établie plus haut pour l'équilibre d'un point sur l'hélice et, par conséquent, nous devrons poser la suite indéfinie de proportions :

$$\begin{aligned}
&\text{pour l'élément } m \ldots p : q :: h : 2\pi R,\\
&\quad — \qquad m' \ldots p' : q' :: h : 2\pi R,\\
&\quad — \qquad m'' \ldots p'' : q'' :: h : 2\pi R,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En se rappelant maintenant que $p+p'+p''+\ldots=P$, et $q+q'+q''+\ldots=Q$, on déduit facilement de la suite de rapports égaux qui précède, la proportion

$$P : Q :: h : 2\pi R,$$

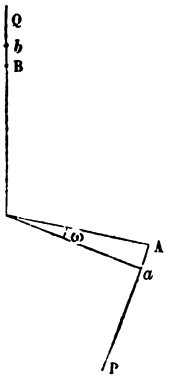
c'est-à-dire que, *pour l'équilibre d'une vis, la puissance qui*

tend à faire tourner doit être à la résistance qui presse dans le sens de l'axe, comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.

On voit par là que, pour contrebalancer une résistance donnée, on a besoin d'une puissance d'autant moindre qu'elle agit avec un bras de levier plus grand et que le pas de la vis est plus petit.

91. Si la vis tourne d'un petit angle ω, l'arc élémentaire Aa décrit par le point d'application de la puissance, dans la direction même de cette force qui tourne avec la machine, sera égal à ωR, et la résistance avancera d'une quantité rectiligne Bb facile à calculer; car, puisque la vis monte de h pour un tour entier $2\pi R$, nous aurons la proportion

Fig. 59.



$$Bb : h :: \omega R : 2\pi R;$$

d'où $$Bb = \frac{h\omega}{2\pi},$$

et, par conséquent,

$$Aa : bB :: \omega R : \frac{h\omega}{2\pi} :: R : \frac{h}{2\pi} :: 2\pi R : h.$$

Or, la condition d'équilibre était

$$Q : P :: 2\pi R : h;$$

il vient donc, si l'on combine ces deux proportions,

$$Aa : Bb :: Q : P,$$

ou $$P \times Aa = Q \times Bb,$$

c'est-à-dire le travail moteur égal au travail résistant.

Inversement, la proportion exprimant la condition d'équilibre se déduirait facilement de la combinaison des deux autres.

L'égalité $P \times Aa = Q \times Bb$ se retrouve encore et peut s'étendre au travail total correspondant à une période finie et déterminée du mouvement, en appliquant aux deux forces P et Q les considérations développées au n° 62. La force P, en effet, rentre dans le premier des deux cas examinés, et son travail est égal à son intensité P, multipliée par l'arc Aa décrit par son point d'application; la force Q, qui correspond évidemment au second cas, donne pour expression du travail total, l'intensité Q multipliée par la distance Bb comprise entre les projections des positions extrêmes du mobile.

Remarque. La même égalité montre que, dans la vis, les espaces Aa et Bb parcourus par les points d'application sont en raison inverse des intensités des forces.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

92. La trigonométrie a pour objet spécial de fournir des méthodes qui permettent de calculer toutes les parties d'un triangle, quand on a des données suffisantes pour les déterminer.

Pour atteindre ce but, il importait de trouver des relations unissant entre eux les côtés et les angles et, pour faciliter l'introduction simultanée de ces quantités de nature différente dans les formules, il était naturel de remplacer les angles ou les arcs qui les mesurent par des lignes droites liées avec eux d'une manière précise, variant avec eux et les déterminant dès qu'elles sont elles-mêmes déterminées. Parmi les lignes qui ont été adoptées, celles dont l'usage est le plus fréquent sont au nombre de six; elles portent les noms suivants :

sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante et *cosécante,*

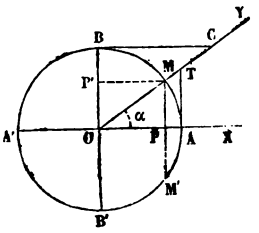
et prennent dans l'écriture, quand elles précèdent immédiatement l'arc auquel elles se rapportent, les abréviations ci-après :

sin, cos, tang, cot, séc et *coséc.*

93. Nous allons donner la définition de chacune de ces lignes :

Soit décrite, du sommet O d'un angle XOY comme centre, une circonférence de rayon OA=R; dans cette circonférence, l'angle XOY que nous supposerons provisoirement plus petit qu'un quadrant et que nous désignerons, pour abréger, par α, est mesuré par l'arc AM, qui croît proportionnellement avec lui depuis zéro jusqu'à la circonférence entière, quand, le côté OA restant fixe, l'angle α croît de zéro à 360°.

Fig. 60.



Cela posé, la perpendiculaire MP abaissée de l'extrémité M de l'arc AM sur le rayon OA qui passe par l'autre extrémité, s'appelle, dans la circonférence de rayon R, le *sinus* de l'angle AOM ou *sin* α.

La ligne OP qui va du centre au pied P du sinus de α, s'appelle le *cosinus* de cet angle ou *cos* α; on voit que cette longueur est précisément égale à celle MP′ du sinus de l'angle MOB, qui lui-même est le *complément* de l'angle α, c'est-à-dire qui forme avec lui une somme égale à 90°.

La portion de la tangente à l'origine AT comprise entre le point A et le point de rencontre T du prolongement du rayon qui passe par l'autre extrémité s'appelle trigonométriquement la *tangente* de l'angle α ou *tang* α, et la longueur BC mesurée sur la tangente en B entre ce point et le point de rencontre du même rayon est dite la *cotangente* de α ou *cot* α; elle est de même égale à la tangente de l'angle complémentaire MOB ou $90° - \alpha$.

Enfin, la *sécante* de l'angle AOM ou *séc* α est la portion

OT du rayon OM comprise entre le centre du cercle et l'extrémité de la tangente; la portion du même rayon qui va du centre à l'extrémité C de la cotangente est dite la *cosécante* de l'angle α ou *coséc* α; c'est encore la sécante du complément de α, et c'est cette relation qu'on a eu pour but de rappeler en plaçant la syllabe *co* en tête des mots cosinus, cotangente et cosécante.

En résumé, l'ensemble des six lignes trigonométriques de l'angle α est, relativement à la circonférence R, dans la figure ci-dessus :

$$\sin\alpha = MP, \quad \text{tang}\,\alpha = AT, \quad \text{séc}\,\alpha = OT,$$
$$\cos\alpha = OP, \quad \cot\alpha = BC, \quad \text{coséc}\,\alpha = OC.$$

Remarque. Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que, si l'on prolonge le sinus MP au-dessous du diamètre AA', on obtient la corde MM' qui est double du sinus et sous-tend l'arc MAM', double lui-même de AM. On peut donc dire en général que *le sinus d'un arc moindre qu'une demi-circonférence, est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double.* C'est cette relation simple et remarquable que l'on exprime algébriquement par la formule

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\,\text{corde}\,2\alpha.$$

94. Les définitions qui précèdent s'appliquent non-seulement à un angle aigu quelconque, comme on vient de le voir, mais encore à tous les angles compris entre 0° et 360°, soit qu'il s'agisse d'un angle obtus proprement dit, c'est-à-dire se terminant dans le second quadrant, soit que l'on considère un angle ou une somme d'angles se terminant dans le troisième ou dans le quatrième quadrant. Les trois figures ci-dessous présentent un exemple de chacun de ces

cas, et il ne reste que quelques observations de détail à ajouter pour rendre complète leur interprétation.

Fig. 61.

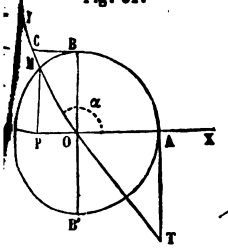


Fig. 62.

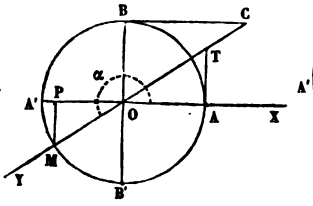
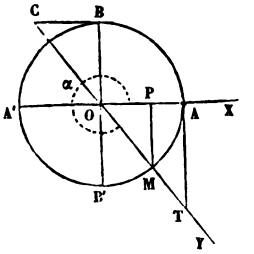


Fig. 63.



En suivant avec attention la marche de chacune des lignes trigonométriques, à mesure que l'angle α augmente, on voit sans peine que, dès que cet angle franchit le premier quadrant ou 90°, quelques-unes de ses lignes, tracées et mesurées comme il a été exposé dans le numéro précédent, repassent par des valeurs déjà observées, mais qui cependant diffèrent de celles-ci par leur position ou par le sens dans lequel elles sont comptées; or, ce sont précisément ces différences qui vont nous servir à distinguer entre eux des angles qui se terminent dans telle ou telle région de la circonférence.

C'est ainsi que, de 90° à 270°, le cosinus qui se mesurait à droite du centre sur le diamètre horizontal AA′, se porte maintenant vers la gauche, parce que c'est de ce côté que se trouve l'extrémité de l'arc et, par suite, le pied de son sinus; de 180° à 360°, les sinus se trouvent tous au-dessous du même diamètre, puisque c'est dans cette partie du plan que se trouve l'extrémité de l'arc considéré; dans le deuxième et le quatrième quadrant, les tangentes et cotangentes se trouvent les unes au-dessous de l'origine A, les autres à gauche du point B; de 90° à 270°, la sécante

qui, mesurée à partir du centre sur le rayon extrême de l'angle, était dirigée dans le sens de ce rayon, se trouve en sens opposé à ce dernier, et la même circonstance se reproduit pour la cosécante quand l'angle considéré varie entre 180° et 360°.

Pour utiliser ces différences au profit de la distinction des arcs ou angles, on a introduit dans les lignes trigonométriques un élément algébrique en affectant du signe des quantités négatives et en introduisant comme tels dans les calculs : 1° les sinus qui seraient géométriquement situés au-dessous du diamètre fixe AA′; 2° les cosinus mesurés à gauche du centre; 3° les tangentes au-dessous de l'origine A; 4° les cotangentes à gauche du point B; 5° les sécantes et les cosécantes qui, à partir du centre, seraient portées en sens inverse du rayon extrême.

Il résulte de ces conventions que, pour des valeurs de α comprises entre 0° et 90°,

$\sin\alpha$ varie de 0 à $+r$,	$\operatorname{tang}\alpha$ varie de 0 à $+\infty$,	séc α varie de $+r$ à $+\infty$,
$\cos\alpha$ varie de $+r$ à 0,	$\operatorname{cot}\alpha$ varie de $+\infty$ à 0,	coséc α varie de $+\infty$ à $+r$;

entre 90° et 180°,

$\sin\alpha$ varie de $+r$ à 0,	$\operatorname{tang}\alpha$ varie de $+\infty$ à 0,	séc α varie de $-\infty$ à $-r$,
$\cos\alpha$ varie de 0 à $-r$,	$\operatorname{cot}\alpha$ varie de 0 à $-\infty$,	coséc α varie de $+r$ à $+\infty$;

entre 180° et 270°,

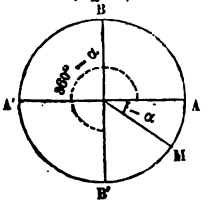
$\sin\alpha$ varie de 0 à $-r$,	$\operatorname{tang}\alpha$ varie de 0 à $+\infty$,	séc α varie de $-r$ à $-\infty$,
$\cos\alpha$ varie de $-r$ à 0,	$\operatorname{cot}\alpha$ varie de $+\infty$ à 0,	coséc α varie de $-\infty$ à $-r$;

enfin, de 270° à 360°,

$\sin\alpha$ varie de $-r$ à 0,	$\operatorname{tang}\alpha$ varie de $-\infty$ à 0,	séc α varie de $+\infty$ à $+r$
$\cos\alpha$ varie de 0 à $+r$,	$\operatorname{cot}\alpha$ varie de 0 à $-\infty$,	coséc α varie de $-r$ à $-\infty$

95. Si, comme cela se présente fréquemment dans les applications, on a à considérer une somme d'angles qui dépasse 4 angles droits ou 360°, il est facile de voir que l'extrémité d'un pareil angle venant forcément prendre l'une des positions déjà considérées dans l'un des quatre quadrants, ses lignes trigonométriques seront respectivement les mêmes que celles de l'angle résultant de la soustraction de la circonférence entière ou d'un nombre entier de circonférences, et qu'en général, *deux angles qui ne diffèrent que par un nombre quelconque de circonférences ont les mêmes lignes trigonométriques*.

Par le même motif, si, au lieu de faire croître les angles à partir de zéro vers les valeurs supérieures, on considère Fig. 64.

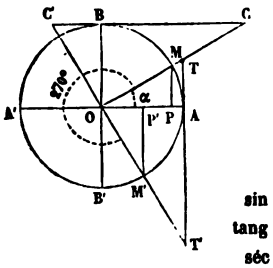


des angles négatifs comptés en sens contraire à partir de la même origine, les lignes trigonométriques reprendront, mais dans un ordre inverse, les valeurs assignées dans le tableau précédent et, si l'on considère en particulier un angle négatif $-\alpha$, il est évident que ses lignes trigonométriques, en valeur absolue et en signes, seront les mêmes que celles de l'angle positif $360^\circ - \alpha$ qui en diffère de 360° ou d'une circonférence.

96. *Si la différence des deux arcs était de trois quadrants*, on verrait, à la seule inspection de la figure 65 et par la comparaison deux à deux des triangles qu'elle comporte, que

$MP' = OP$,	$OP' = MP$,
$AT' = BC$,	$BC' = AT$,
$OT' = OC$,	$OC' = OT$;

Fig. 65.

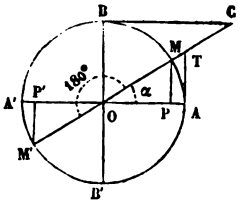


et, en tenant compte des signes suivant les règles posées au n° 94, ces égalités se traduisent trigonométriquement dans les suivantes :

$$\sin(270°+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(270°+\alpha) = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tang}(270°+\alpha) = -\cot\alpha, \quad \cot(270°+\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha,$$
$$\sec(270°+\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha, \quad \operatorname{cosec}(270°+\alpha) = -\sec\alpha.$$

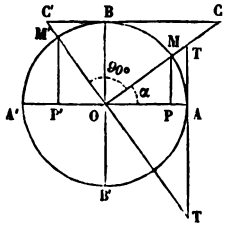
Si deux angles diffèrent entre eux de deux quadrants ou d'une demi-circonférence, la figure ci-contre établit de même que leurs sinus et cosinus sont respectivement égaux et de signes contraires; les tangentes et les cotangentes sont les mêmes; les sécantes et les cosécantes sont égales et de signes contraires; en sorte que l'on a

Fig. 66.



$$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \operatorname{tang}(180°+\alpha) = \operatorname{tang}\alpha, \quad \sec(180°+\alpha) = -\sec\alpha,$$
$$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \cot(180°+\alpha) = \cot\alpha, \quad \operatorname{cosec}(180°+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Fig. 67.

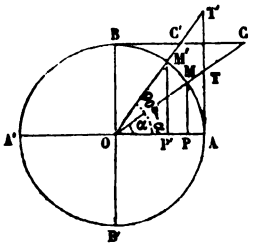


Si deux angles diffèrent d'un quadrant, c'est-à-dire s'ils s'expriment par α et $90°+\alpha$, on reconnaît de même que

$$\sin(90°+\alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tang}(90°+\alpha) = -\cot\alpha, \quad \cot(90°+\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha,$$
$$\sec(90°+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha, \quad \operatorname{cosec}(90°+\alpha) = \sec\alpha.$$

97. Nous avons déjà dit, en définissant les lignes trigo-

Fig. 68.



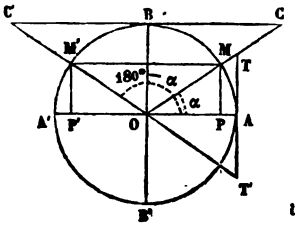
nométriques, que les cosinus, cotangente, cosécante d'un angle étaient respectivement les sinus, tangente et sécante du *complément* de cet angle; il résulte nécessairement de là que cette réciprocité s'étend aux six lignes trigonométriques et que l'on a

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$,	$\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$,	$\sec(90°-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$,
$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$,	$\cot(90°-\alpha)=\tan\alpha$,	$\operatorname{cosec}(90°-\alpha)=\sec\alpha$.

L'inspection de la figure 68 établit du reste, de la façon la plus évidente, ces nouvelles relations.

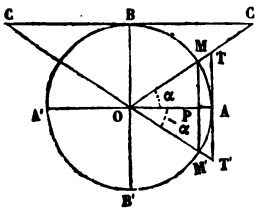
Quand deux angles sont supplémentaires, c'est-à-dire lorsque leur somme équivaut à 180°, on a, toujours en combinant les indications de la figure avec les règles données plus haut pour les signes,

Fig. 69.



$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$,	$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$,
$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$,	$\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$,
$\sec(180°-\alpha)=-\sec\alpha$,	$\operatorname{cosec}(180°-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$.

Fig. 70.



Enfin, si deux angles sont égaux et de signes contraires, on aura

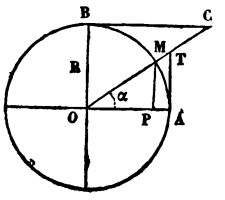
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$,	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$,	$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$,
$\sec(-\alpha)=\sec\alpha$,	$\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha$.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ARC.

98. Nous avons établi, dans ce qui précède, la nomenclature des six lignes trigonométriques des arcs ou angles, et nous avons fait voir que, quelle que soit la grandeur ou le signe d'un angle, chacune de ses lignes trigonométriques se lie par une relation très-simple à celles d'un angle compris dans le premier quadrant, à tel point que toutes les lignes d'un angle quelconque sont respectivement égales, en valeur absolue et sauf le signe, à quelqu'une de celles d'un angle moindre que 90°.

Nous allons maintenant établir, pour un même angle α, les relations qui unissent entre elles ses six lignes trigonométriques; ces relations sont au nombre de cinq :

Fig. 71.



Soit R le rayon arbitraire, mais constant, de la circonférence dans laquelle nous prenons les mesures angulaires, et α un angle quelconque; soient également construites les six lignes trigonométriques de cet angle.

Le triangle rectangle MOP donne immédiatement

$$\overline{MP}^2+\overline{OP}^2=R^2,$$

d'où

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=R^2.$$

Les triangles semblables OMP, OTA donnent ensuite

$$TA:MP::OA:OP, \text{ ou } \operatorname{tang}\alpha:\sin\alpha::R:\cos\alpha,$$

$$OT:OM::OA:OP, \text{ ou } \operatorname{séc}\alpha:R::R:\cos\alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha=R\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{séc}\alpha=\frac{R^2}{\cos\alpha}.$$

De même, les triangles semblables OMP, BOC fournissent

$$BC : OP :: OB : MP, \text{ ou } \cot\alpha : \cos\alpha :: R : \sin\alpha,$$
$$OC : OB :: OM : MP, \text{ ou } \operatorname{cosec}\alpha : R :: R : \sin\alpha;$$

d'où $\cot\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ et $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{R^2}{\sin\alpha}$.

99. Ces cinq relations, que nous réunissons ici :

$$1^\circ\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = R^2, \quad 2^\circ\ \operatorname{tang}\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad 3^\circ\ \cot\alpha = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad 4^\circ\ \sec\alpha = R^2\frac{1}{\cos\alpha}, \quad 5^\circ\ \operatorname{cosec}\alpha = R^2\frac{1}{\sin\alpha};$$

sont les seules équations distinctes qui lient entre elles les six quantités $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$; si donc l'une des six lignes trigonométriques d'un angle était donnée, il serait toujours facile, au moyen de ces cinq équations, de déterminer chacune des cinq autres.

Comme exemple de ce problème, nous appliquerons ce que nous venons de dire à une question qui se présente assez fréquemment; nous voulons parler de la détermination du sinus et du cosinus d'un angle dont on connaît seulement la tangente.

Les formules propres à conduire à la solution cherchée sont les deux premières de celles qui précèdent; tirant successivement $\cos\alpha$, puis $\sin\alpha$ de la deuxième et le reportant dans la première, nous obtenons d'une part :

$$\cos\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}, \quad \sin^2\alpha\left(1+\frac{R^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}\right) = R^2;$$

d'où $$\sin^2\alpha = \frac{R^2}{1+\frac{R^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{R^2\operatorname{tang}^2\alpha}{R^2+\operatorname{tang}^2\alpha};$$

d'autre part :

$$\sin\alpha=\frac{\text{tang}\,\alpha\cos\alpha}{R},\quad \cos^2\alpha\left(1+\frac{\text{tang}^2\alpha}{R^2}\right)=R^2;$$

d'où
$$\cos^2\alpha=\frac{R^2}{1+\frac{\text{tang}^2\alpha}{R^2}}=\frac{R^4}{R^2+\text{tang}^2\alpha};$$

enfin,
$$\sin\alpha=\frac{R\,\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{R^2+\text{tang}^2\alpha}}\text{ et }\cos\alpha=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+\text{tang}^2\alpha}};$$

ce sont les deux valeurs cherchées.

On peut, d'ailleurs, facilement vérifier sur la figure 71 la justesse des deux relations qui viennent d'être trouvées; cette figure donne en effet, à cause de la similitude des triangles OMP, OTA et parce que $OT=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{TA}^2}$,

MP : TA :: OM : OT, ou $\sin\alpha : \text{tang}\,\alpha :: R : \sqrt{R^2+\text{tang}^2\alpha}$,

OP : OA :: OM : OT, ou $\cos\alpha : R :: R : \sqrt{R^2+\text{tang}^2\alpha}$.

100. Dans toutes les formules qui précèdent, le rayon R a conservé une valeur constante, mais quelconque, en ce sens que nous n'avons encore fait aucune hypothèse particulière sur la grandeur du cercle dans lequel nous comptions les angles; il est en effet évident *à priori* que les vérités que nous avons déduites sont complétement indépendantes de cet élément. Toutefois, pour la simplification des calculs ultérieurs et pour donner plus de précision aux règles qui vont être posées, il est convenable d'assigner au rayon une valeur déterminée et convenue; celle qu'il était le plus simple et le plus naturel d'adopter était l'*unité* de longueur; la généralité des déductions que nous tirerons des formules n'est, nous le répétons, nullement altérée par cette supposition; seulement, au lieu de représenter des longueurs géométriques, les lignes trigonométriques qui entrent dans les calculs ne sont plus alors que les ***rapports***,

constants pour un même angle, qui existent entre les sinus, cosinus, tangentes, etc., mesurés dans une circonférence d'un rayon quelconque et ce même rayon; ces rapports prennent le nom de *lignes trigonométriques naturelles*, et rien n'est si simple que de revenir d'une formule dans laquelle entrent des lignes trigonométriques naturelles à la relation qui lui serait analogue dans une circonférence de rayon R, en remplaçant chacune de ces lignes par le rapport de la même ligne au nouveau rayon.

Ceci posé, les cinq relations fondamentales deviennent, quand on y fait R=1,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \quad \left|\begin{array}{l}\operatorname{tang}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l}\operatorname{séc}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha},\\ \operatorname{coséc}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha},\end{array}\right.$$

et les formules du sinus et du cosinus en fonction de la tangente donnent

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}.$$

Ces deux dernières expressions sont également d'un usage fréquent et veulent être retenues; elles prennent encore une forme plus symétrique et par conséquent plus simple, quand la tangente est donnée sous la forme d'une fraction $\frac{m}{n}$; on a en effet, toutes réductions faites,

$$\sin\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \text{ et } \cos\alpha=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Exemples. Quel est le sinus et quel est le cosinus de l'angle dont la tangente est $\frac{3}{4}$?

Les formules ci-dessus donnent $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ et $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Si l'on avait $\text{tang}\,\alpha = \frac{17}{5}$, les formules donneraient de la même manière

$$\sin\alpha = \frac{17}{\sqrt{314}} \text{ et } \cos a = \frac{5}{\sqrt{314}}.$$

Remarque. Les deux valeurs de $\text{tang}\,\alpha$ et $\cot\alpha$ sont telles que leur produit est égal au carré du rayon ou, dans l'hypothèse nouvelle, à l'unité; il est donc bon de se rappeler que, quelle que soit la valeur de l'angle α, sa tangente et sa cotangente sont des quantités inverses l'une de l'autre et liées par la relation

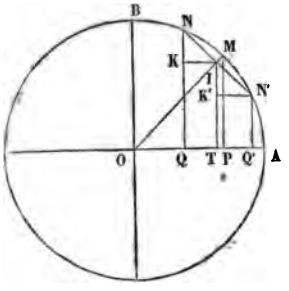
$$\text{tang}\,\alpha \cot\alpha = 1.$$

PRINCIPALES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE DEUX ANGLES ET CELLES DE LEUR SOMME OU DE LEUR DIFFÉRENCE.

101. Soient deux arcs AM, MN, que nous appellerons respectivement a et b; leur somme $a+b$ sera représentée par l'arc AN; de la sorte, les lignes MP, OP, NI, OI, NQ et OQ représenteront respectivement $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$, $\sin(a+b)$ et $\cos a+b$).

Fig. 72.



Abaissons du point I les deux perpendiculaires IT et IK sur OA et OB; cette construction nous donne

$$\text{NQ ou } \sin(a+b) = \text{KQ} + \text{NK} = \text{IT} + \text{NK},$$
$$\text{OQ ou } \cos(a+b) = \text{OT} - \text{QT} = \text{OT} - \text{IK}.$$

Or, les triangles semblables OIT, OMP et KNI donnent, le rayon étant égal à l'unité,

$$\begin{aligned}
&IT:MP::OI:OM, \text{ ou } IT:\sin a::\cos b:1, \text{ d'où } IT=\sin a\cos b,\\
&NK:OP::NI:OM, \text{ ou } NK:\cos a::\sin b:1, \text{ d'où } NK=\cos a\sin b,\\
&OT:OP::OI:OM, \text{ ou } OT:\cos a::\cos b:1, \text{ d'où } OT=\cos a\cos b,\\
&IK:MP::NI:OM, \text{ ou } IK:\sin a::\sin b:1, \text{ d'où } IK=\sin a\sin b,
\end{aligned}$$

et, par la substitution de ces valeurs dans celles de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$, il vient

$$\begin{aligned}
\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\sin b\cos a,\\
\cos(a+b)&=\cos a\cos b+\sin a\sin b.
\end{aligned}$$

Ces deux expressions sont les formules fondamentales de la Trigonométrie; elles viennent d'être établies pour des angles tels que $a+b<90^\circ$; mais rien ne serait plus facile que de faire une série de démonstrations analogues pour montrer directement qu'elles s'appliquent à tous les cas, quelles que soient les valeurs absolues et relatives de a et de b; cette propriété peut d'ailleurs s'établir aussi par une discussion qui, bien que simple, sort des limites de notre cadre. Nous regarderons en conséquence les deux formules ci-dessus comme ayant une généralité complète et pouvant s'appliquer à deux angles quelconques, pourvu que l'on ait égard aux valeurs corrélatives des lignes.

Remarque. Puisque $\cos a$ et $\cos b$ sont nécessairement des fractions proprement dites, $\sin a\cos b$ est plus petit que $\sin a$, et $\sin b\cos a$ est plus petit que $\sin b$; par suite, $\sin(a+b)$ est toujours plus petit que $\sin a+\sin b$.

102. Les formules les plus importantes parmi celles qui peuvent se déduire des précédentes, sont celles qui four-

nissent le sinus et le cosinus de la différence de deux arcs a et b.

Nous pourrions simplement y remplacer l'arc b par l'arc négatif $-b$, et nous obtiendrions immédiatement :

$$\sin(a-b)=\sin a\cos(-b)+\sin(-b)\cos a=\sin a\cos b-\sin b\cos a,$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

Mais les formules primitives n'ayant été démontrées directement que pour des arcs positifs, on trouvera peut-être plus satisfaisant de procéder ainsi qu'il suit :

Les relations du n° 101 étant supposées vraies, quels que soient les arcs positifs a et b, rien ne nous empêche de poser

$$a+b=a',$$

d'où

$$a=a'-b,$$

et d'y substituer ces valeurs; il vient alors

$$\sin a'=\sin(a'-b)\cos b+\sin b\cos(a'-b),$$
$$\cos a'=\cos(a'-b)\cos b-\sin(a'-b)\sin b.$$

Si maintenant, après avoir multiplié tous les termes de la première de ces équations par $\cos b$ et ceux de la seconde par $\sin b$, nous retranchons l'une de l'autre les deux relations obtenues, nous trouverons

$$\sin a'\cos b-\cos a'\sin b=\sin(a'-b)(\cos^2 b+\sin^2 b).$$

Or, nous savons (100) que $\cos^2 b+\sin^2 b=1$, et la relation précédente se réduit par conséquent à

$$\sin(a'-b)=\sin a'\cos b-\cos a'\sin b.$$

De même, en multipliant la première des équations ci-dessus par $\sin b$ et la seconde par $\cos b$, puis faisant leur somme, on obtient

$$\sin a' \sin b + \cos a' \cos b = \cos(a' - b)(\cos^2 b + \sin^2 b),$$

ou $$\cos(a' - b) = \cos a' \cos b + \sin a' \sin b.$$

On voit donc qu'en supprimant l'accent de a' et ayant soin de ne regarder comme se correspondant que les signes supérieurs ou les signes inférieurs, les valeurs de $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ en fonction de $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$ et $\cos b$, peuvent se grouper comme il suit :

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin b \sin b.$$

Les valeurs de $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ pourraient d'ailleurs aussi s'obtenir directement par une démonstration géométrique tout à fait analogue à celle qui a servi à établir les valeurs de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$. La figure 72 montre en effet qu'en prolongeant NI en IN′ de façon que $MN' = b$ et $AN' = a - b$, tirant ensuite N′K′ parallèle à OA, on forme le triangle K′N′I semblable aux deux triangles OIT, OMP, et au moyen duquel la démonstration s'achève identiquement comme la première.

Il est inutile d'ajouter que les deux nouvelles expressions comportent un caractère de généralité qui s'établirait par les mêmes moyens qui ont été indiqués plus haut pour $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.

103. La tangente d'un angle étant, avec le sinus et le cosinus, l'une des lignes trigonométriques le plus usuellement employées, nous allons encore déduire des formules précédentes les valeurs de la tangente de la somme et de la différence des arcs a et b en fonction des tangentes de ces arcs.

Nous avons en effet

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b},$$

et si, dans cette expression, nous divisons le numérateur et le dénominateur par $\cos a \cos b$, en remplaçant ensuite $\frac{\sin a}{\cos a}$ par $\operatorname{tang} a$, $\frac{\sin b}{\cos b}$ par $\operatorname{tang} b$, il viendra

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

Cette expression montre que, si les angles a et b sont complémentaires, la tangente de leur somme étant infinie, le dénominateur $1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b$ est forcément nul et on a

$$\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b = 1;$$

ce résultat était d'ailleurs facile à prévoir; car, si $a+b=90^\circ$, $\operatorname{tang} b$ n'est autre chose que $\cot a$, et nous savons (100, Rem.) que, pour un angle quelconque, $\operatorname{tang} a \cot a = 1$.

Des calculs semblables nous conduiraient, sans aucune difficulté, à des valeurs analogues de $\cot(a \pm b)$, $\sec(a \pm b)$ et $\operatorname{cosec}(a \pm b)$; mais ces expressions sont moins usuelles que les premières et nous ne nous y arrêterons pas.

104. En changeant b en $b+c$ dans les formules ci-dessus et introduisant les valeurs connues de $\sin(b+c)$, $\cos(b+c)$, $\operatorname{tang}(b+c)$, etc., on arriverait ainsi sans peine à trouver $\sin(a+b+c)$, $\cos(a+b+c)$, $\operatorname{tang}(a+b+c)$, etc., et, en général, les lignes trigonométriques d'un arc composé de la somme ou de la différence de tant d'autres que l'on voudrait; sans aller plus loin dans ces calculs qui n'offrent pas d'intérêt pour le but que nous nous proposons, nous mettrons néanmoins en évidence un résultat remarquable qui ressort de la valeur de $\operatorname{tang}(a+b+c)$.

Si dans $\operatorname{tang}(a+b)$ nous changeons b en $b+c$, il vient

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}(b+c)}{1-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}(b+c)};$$

puis, en remplaçant $\operatorname{tang}(b+c)$ par sa valeur connue, nous aurons

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}a+\dfrac{\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}c}{1-\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c}}{1-\operatorname{tang}a\dfrac{\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}c}{1-\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c}},$$

ou, en chassant les doubles dénominateurs,

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}c-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c}{1-(\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}a\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c)}.$$

Or, on peut conclure de cette valeur deux choses :

1° Si $a+b+c=90^\circ$, on a $\operatorname{tang}(a+b+c)=\infty$,

d'où $\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}a\operatorname{tang}c+\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c=1$;

2° Si $a+b+c=180^\circ$, comme cela a lieu dans tout triangle, on a $\operatorname{tang}(a+b+c)=\operatorname{tang}180^\circ=0$ et, par suite,

$$\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b+\operatorname{tang}c=\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b\operatorname{tang}c.$$

Ces deux résultats peuvent ainsi se traduire en langage ordinaire :

1° *Si trois angles forment une somme égale à* 90°, *la somme des produits deux à deux de leurs tangentes est égale à l'unité;*

2° *Dans tout triangle, la somme des tangentes des trois angles est égale au produit de ces mêmes tangentes.*

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE ET CELLES DE L'ANGLE DOUBLE, TRIPLE, QUADRUPLE, ETC.

105. Ces relations se déduisent immédiatement des précédentes, en y supposant que l'angle b devient égal à l'angle a; ce qui donne

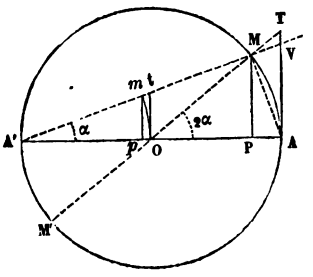
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a, \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a, \qquad \tang 2a = \frac{2\tang a}{1-\tang^2 a}.$$

Remarquons en passant que la valeur de $\cos 2a$ se prête à une simplification notable qui permet de faire disparaître de la formule le cosinus ou le sinus de l'arc a, au moyen de la relation connue $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$; on obtient ainsi à volonté :

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{ou} \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$$

106. Ces nouvelles formules peuvent, du reste, aussi s'établir facilement par une démonstration géométrique; pour cela, remarquons que, dans la figure ci-contre, si nous supposons l'angle MOA égal à $2a$, l'angle MA′A, qui est nécessairement égal à la moitié du premier, représentera a: par suite, en traçant, du centre A′ et avec un rayon égal à OA ou à l'unité, un arc de cercle, les lignes MP, OP, AT, mp, A′p et Ot représenteront respectivement sin $2a$, cos $2a$, tang $2a$, sin a, cos a et tang a.

Fig. 73.



Ceci posé, les triangles semblables MPA′, *mp*A′ donnent la proportion

$$MP : mp :: MA' : mA',$$

laquelle n'est autre chose que celle-ci :

$$\sin 2a : \sin a :: MA' : 1.$$

Or, les triangles rectangles MAA′, *mp*A′ qui ont un angle commun en A′ sont aussi semblables et fournissent la nouvelle proportion

$$MA' : A'p \text{ ou } \cos a :: AA' \text{ ou } 2 : mA' \text{ ou } 1.$$

La valeur de MA′ tirée de celle-ci et portée dans la précédente donne enfin

$$\sin 2a : \sin a :: 2\cos a : 1,$$

c'est-à-dire la première des relations qu'il s'agit d'établir.

D'un autre côté, la ligne MA est double de *mp* ou sin *a*, puisque tel est le rapport de similitude des côtés des triangles MAA′, *mp*A′; elle est en même temps moyenne proportionnelle entre AA′ et AP; on peut donc poser

$$\overline{MA}^2 \text{ ou } (2\sin a)^2 = AA' \times AP = 2(1 - \cos 2a),$$

d'où vient immédiatement

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a,$$

ou la seconde relation à démontrer.

Enfin, puisque AV=2O*t*, nous avons sur-le-champ

$$AT = AV + TV = 2Ot + TV,$$

ou

$$\text{tang } 2a = 2\,\text{tang } a + TV.$$

Or, les triangles semblables TMV, MO*t* fournissent

$$TV : Ot :: TM : OM \text{ ou } 1,$$

et cette proportion donne, d'une part,

$$TV = Ot \times TM ;$$

d'autre part, en remarquant que $TV = AT - AV = AT - 2Ot$,

$$AT = Ot\,(2 + TM) = Ot\,(MM' + TM) = Ot \times TM'.$$

Mais, en vertu d'une propriété connue de la tangente et de la sécante issues d'un même point, nous avons encore

$$\overline{AT}^2 = TM' \times TM,$$

et la division membre à membre de ces deux dernières égalités donne

$$TM = Ot \times AT.$$

Il en résulte donc d'abord que

$$TV = \overline{Ot}^2 \times AT = \operatorname{tang}^2 a \times \operatorname{tang} 2a,$$

et, par suite, que

$$\operatorname{tang} 2a = 2\operatorname{tang} a + \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang} 2a, \quad \text{c. q. f. d.}$$

107. Pour passer de là à $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\operatorname{tang} 3a$, il suffit de faire $b = 2a$ dans $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\operatorname{tang}(a+b)$, et d'y substituer les valeurs trouvées plus haut pour $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tang} 2a$.

C'est ainsi qu'on obtient, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} \sin 3a &= 3\sin a - 4\sin^3 a, \\ \cos 3a &= 4\cos^3 a - 3\cos a, \end{aligned}\right| \qquad \operatorname{tang} 3a = \frac{3\operatorname{tang} a}{1 - 3\operatorname{tang}^2 a}.$$

En faisant enfin $b = 3a$, puis $b = 4a$, et ainsi de suite, dans les formules fondamentales du n° 101, on arriverait aux relations qui existent entre les lignes trigonométriques d'un multiple quelconque de a et celles de l'angle a lui-même.

Par la même raison que dans le paragraphe précédent, nous ne nous arrêterons pas à établir les valeurs des cotangentes, sécantes et cosécantes des arcs multiples; les méthodes exposées ci-dessus s'appliquent évidemment aussi à ces lignes.

RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE a ET CELLES DES ANGLES $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, ETC.

108. Si, dans les formules relatives à l'arc $2a$, nous remplaçons $2a$ par a, et par conséquent a par $\frac{a}{2}$, elles deviendront

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2},$$

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1.$$

De la dernière on tire

$$2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a \quad \text{ou} \quad \sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},$$

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a \quad \text{ou} \quad \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

et en divisant l'une par l'autre ces deux valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$, on trouve immédiatement

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}, \quad \cot\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}.$$

109. Il est facile aussi de trouver les sinus, cosinus et tangente de $\frac{a}{2}$ en fonction du sinus de a; pour cela on combine les formules

$$\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}=1,\quad 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\sin a.$$

En les ajoutant ensemble, puis en les retranchant l'une de l'autre, on obtient successivement

$$\left(\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\right)^2=1+\sin a,\quad \left(\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}\right)^2=1-\sin a,$$

ou

$$\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1+\sin a}\text{ et }\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\sin a}.$$

Connaissant maintenant la somme et la différence des deux quantités $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$, il vient, pour les expressions de ces quantités elles-mêmes,

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}}{2},\quad \cos\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}}{2},$$

et pour celle de $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$,

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}}{\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}},$$

lesdites expressions admettant autant de valeurs distinctes qu'il peut être fait de combinaisons différentes des signes qu'elles comportent.

110. La valeur trouvée ci-dessus pour $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$, en fonction de $\cos a$, est

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}};$$

et si, dans cette expression déjà simple, nous multiplions sous le radical les deux termes de la fraction alternativement par $1+\cos a$ et par $1-\cos a$, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 a}{(1+\cos a)^2}}=\pm\frac{\sin a}{1+\cos a}$$

et $$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}}=\pm\frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

Ces nouvelles valeurs sont surtout précieuses, parce qu'elles sont débarrassées de radicaux.

111. Enfin, si l'on voulait avoir $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tang} a$, on devrait, dans la formule $\operatorname{tang} 2a=\frac{2\operatorname{tang} a}{1-\operatorname{tang}^2 a}$, remplacer $2a$ par a, et l'on aurait aussi la relation

$$\operatorname{tang} a=\frac{2\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{a}{2}},$$

qui revient à l'équation du deuxième degré

$$\operatorname{tang}^2\frac{a}{2}+\frac{2}{\operatorname{tang} a}\operatorname{tang}\frac{a}{2}=1.$$

La résolution de cette équation par la méthode connue conduit à l'expression suivante :

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=-\frac{1}{\operatorname{tang} a}\pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tang}^2 a}+1}=\frac{1}{\operatorname{tang} a}\left(-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 a}\right),$$

laquelle présente, comme l'on voit, une double valeur de $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ pour chaque valeur de $\operatorname{tang} a$.

112. Pour obtenir les lignes trigonométriques de l'angle $\frac{a}{3}$ en fonction de celles de a, il faut, dans les expressions

$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a,$$
$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a,$$
$$\operatorname{tang} 3a=\frac{3\operatorname{tang} a}{1-3\operatorname{tang}^2 a},$$

remplacer $3a$ par a et, en conséquence, a par $\frac{a}{3}$; il vient alors

$$\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3},$$

$$\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3},$$

et

$$\operatorname{tang} a = \frac{3\operatorname{tang}\frac{a}{3}}{1-3\operatorname{tang}^2\frac{a}{3}}.$$

Ces trois relations sont autant d'équations du troisième degré dans lesquelles les inconnues sont respectivement $\sin\frac{a}{3}$, $\cos\frac{a}{3}$, $\operatorname{tang}\frac{a}{3}$; l'impossibilité de les résoudre algébriquement nous force à les présenter sous cette forme.

Il en serait de même, et à plus forte raison, des lignes relatives à des angles tels que $\frac{a}{4}$, ^{a}, etc.; nous ne pourrions qu'indiquer les relations qui lient ces lignes à celles de l'angle a, et la méthode pour arriver à ces relations est absolument la même que celle qui a servi pour $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{3}$.

113. Il nous reste maintenant à expliquer pourquoi, lorsqu'un angle est donné par son sinus, son cosinus ou sa tangente, on obtient plusieurs valeurs pour le sinus, le cosinus et la tangente de la moitié de cet angle et, en général, pour les lignes trigonométriques d'un sous-multiple quelconque dudit angle.

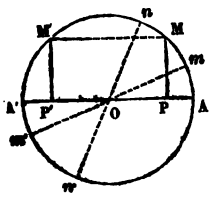
On comprend en effet que, quand on donne le sinus, par exemple, d'un arc AM ou a, on désigne en même temps et au même titre l'arc a et l'arc supplémentaire AM′ ou $\pi - a$, qui a le même sinus; ce sinus appartient en outre à la série indéfinie des arcs que l'on obtient en ajoutant à chacun

des deux sus-indiqués un nombre quelconque k de circonférences 2π, et tous ces arcs sont par conséquent compris dans l'un des deux groupes représentés par

$$a+2k\pi,\ \pi-a+2k\pi.$$

Si donc l'on cherche l'expression de l'une des lignes trigonométriques de la moitié de l'arc dont le sinus est a, on ne peut manquer de trouver en même temps la valeur de cette ligne pour les angles égaux à la moitié de tous ceux que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire pour tous les angles groupés dans les deux expressions

Fig. 74.



$$\frac{a}{2}+k\pi,\ \frac{\pi-a}{2}+k\pi,$$

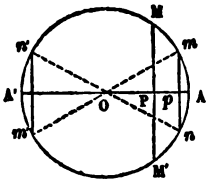
k devant recevoir successivement toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à l'infini; or, ces angles s'obtiennent évidemment tous en ajoutant séparément aux moitiés Am et An dès deux angles AM et AM′ ou a et $\pi-a$ un nombre croissant de demi-circonférences. Quand on aura ajouté à chacune de ces moitiés deux demi-circonférences, on retombera nécessairement encore sur les points m et n; les arcs dont il s'agit se termineront donc tous en l'un des quatre points m, n, m', n', et, par conséquent, chacune de leurs lignes trigonométriques ne sera susceptible que de quatre valeurs différentes au plus.

La même conclusion s'applique au cas où, l'angle a étant donné par son cosinus, ce cosinus correspond également à l'arc négatif $-a$; elle subsiste aussi quand c'est la tangente de a qui est donnée, car on doit considérer en même temps l'arc $\pi+a$ qui a la même tangente que a. Toutefois, dans

certains cas, comme lorsqu'il s'agit de déterminer les lignes trigonométriques de la moitié de a en fonction de $\cos a$, les quatre valeurs peuvent devenir égales deux à deux et se réduire à deux, ainsi qu'on l'a vu plus haut (108).

En effet, quand on donne le cosinus OP de l'arc AM et de l'arc négatif AM', le calcul doit conduire aux sinus et cosinus 1° de l'arc Am ou $\frac{AM}{2}$ et de ce même arc augmenté d'un nombre quelconque de demi-circonférences, c'est-à-dire d'arcs qui tous se terminent en m ou en m'; 2° de l'arc négatif An et de ce même arc augmenté d'un nombre quelconque de demi-circonférences, c'est-à-dire d'arcs terminés en n ou en n'; or, ces quatre points m, m', n, n' étant symétriques deux à deux par rapport aux deux diamètres principaux du cercle, correspondent à des arcs qui deux à deux ont même sinus et même cosinus, et ceci explique comment on n'a trouvé, pour chacune des lignes $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\cos a$, que deux valeurs égales et de signes contraires.

Fig. 75.



Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion, qui pourrait, par des considérations tout à fait analogues, s'étendre aux autres lignes trigonométriques et à des sous-multiples quelconques de l'arc a. On établirait facilement, par exemple, qu'en général, si l'on cherche à exprimer $\sin\frac{a}{n}$ et $\cos\frac{a}{n}$ en fonction soit de $\sin a$, soit de $\cos a$, on doit trouver $2n$ valeurs, sauf quelques cas où ce nombre se réduit à n, lesquels cas sont signalés dans le tableau suivant :

ÉTANT DONNÉ	TROUVER	NOMBRE DE VALEURS DISTINCTES.	
		n pair.	n impair.
$\sin a$	$\sin\frac{a}{n}$	$2n$	n
	$\cos\frac{a}{n}$	$2n$	$2n$
$\cos a$	$\sin\frac{a}{n}$	n	$2n$
	$\cos\frac{a}{n}$	n	n

AUTRES RELATIONS IMPORTANTES TIRÉES DES FORMULES FONDAMENTALES.

114. Remontons aux formules fondamentales :

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a, \quad \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a, \quad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

En combinant par addition et soustraction ces quatre relations deux à deux, on obtient

$$2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b),$$
$$2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b),$$
$$2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b),$$
$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b),$$

et ces nouvelles formules servent à transformer le produit de deux lignes trigonométriques en une somme ou une différence.

115. Si, dans ces dernières relations, nous faisons

$$a+b=p \text{ et } a-b=q,$$

d'où $$a=\frac{p+q}{2} \text{ et } b=\frac{p-q}{2},$$

elles deviendront

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$
$$\cos q-\cos p=2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

formules d'un fréquent usage, surtout dans le calcul logarithmique, pour changer une somme ou une différence en un produit.

116. En divisant deux à deux ces quatre dernières formules, et en se rappelant que, en général,

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\text{tang } A=\frac{1}{\cot A},$$

on obtient encore des résultats remarquables, dont toutefois les plus saillants sont ceux-ci :

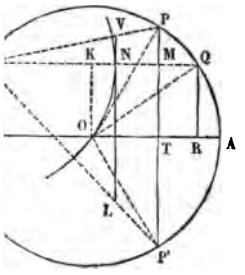
$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\text{tang}\frac{p+q}{2}}{\text{tang}\frac{p-q}{2}},$$
$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\text{tang}\frac{p+q}{2},$$
$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\text{tang}\frac{p-q}{2}.$$

Le premier, en particulier, dont nous indiquerons plus loin une application à la résolution des triangles, peut s'énoncer ainsi : *la somme des sinus de deux angles est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces angles est à la tangente de leur demi-différence.*

nouvelles relations fournies par le calcul peuvent rs se vérifier par une démonstration géométrique nple.

nt, à cet effet, l'angle AOP$=p$, l'angle AOQ$=q$.

Fig. 76.



Tirons l'horizontale QS et, du point S comme centre avec le rayon du cercle, décrivons l'arc ON; traçons les verticales PTP′, QR, KO et VNL, cette dernière étant tangente en N au cercle dont le centre est en S. Il résultera de cette construction :

$$\text{QOP}'=p+q, \quad \text{QOP}=p-q;$$

$$\text{QSP}'=\frac{\text{QOP}'}{2}=\frac{p+q}{2}, \quad \text{QSP}=\frac{\text{QOP}}{2}=\frac{p-q}{2};$$

p, QR$=\sin q$, | MP′$=$P′T$+$MT$=$PT$+$QR$=\sin p+\sin q$;
p, OR$=\cos q$, | MP$=$PT$-$MT$=$PT$-$QR$=\sin p-\sin q$,
MS$=$MK$+$KS$=$OT$+$OR$=\cos p+\cos q$.

ang QSP′$=\text{tang}\frac{p+q}{2}$, VN$=$tang QSP$=\text{tang}\frac{p+q}{2}$.

osé, les trois lignes SP, SQ, SP′, coupées par les arallèles VL et PP′, fournissent immédiatement les roportions suivantes :

$$\text{MP}' : \text{MP} :: \text{LN} : \text{VN},$$
$$\text{MP}' : \text{MS} :: \text{LN} : \text{NS ou 1},$$
$$\text{MP} : \text{MS} :: \text{VN} : \text{NS ou 1},$$

les ne sont autre chose que les trois relations sus-es.

117. Enfin, en revenant aux formules fondamentales rappelées au n° **114**, si nous multiplions membre à membre les deux égalités de chaque couple, nous obtiendrons, par une transformation extrêmement simple et que, pour cette raison, il serait superflu de développer ici, les relations

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a,$$
$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a,$$

qui peuvent servir à remplacer par des produits des différences de sinus ou cosinus carrés.

USAGE DES TABLES DE SINUS.

118. Il n'entre pas dans notre cadre de faire connaître les méthodes qui ont servi à calculer les divers éléments des Tables trigonométriques; nous devons nous borner à exposer : 1° que ces tables contiennent les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de tous les angles croissant de minute en minute ou de dix secondes en dix secondes depuis 0° jusqu'à 90°, les lignes des angles supérieurs à un quadrant étant, comme on l'a vu (94 et suivants), numériquement les mêmes que les premières; 2° qu'au lieu de présenter les valeurs propres des lignes trigonométriques, les tables renferment les logarithmes de ces lignes, lesquels sont d'un usage beaucoup plus fréquent; 3° qu'enfin ces logarithmes ont été tous augmentés de dix unités, pour éviter les logarithmes négatifs d'un grand nombre de lignes trigonométriques qui, en ce qui concerne les sinus et cosinus, sont toujours moindres que le rayon, de même que les tangentes des angles inférieurs à 45° et les cotangentes des angles plus grands. Ceci revient évidemment à multiplier

les lignes trigonométriques naturelles par l'unité suivie de dix zéros ou à prendre pour rayon des tables la dixième puissance de 10, sauf à avoir égard à cette circonstance (100) dans l'application des formules, en ne perdant pas de vue que *le logarithme du rayon est* alors *égal à* 10.

119. Les tables du baron Reynaud renferment les logarithmes à 7 décimales des lignes trigonométriques pour tous les degrés et minutes du quart de la circonférence. Pour tous les angles moindres que 45°, les degrés sont placés au haut des pages et les minutes dans la première colonne à gauche; pour les angles compris entre 45° et 90°, les degrés sont placés au bas des pages et les minutes dans la dernière colonne à droite. Cette disposition, basée sur la propriété des angles complémentaires, évite des répétitions inutiles et réduit de moitié l'étendue de la table. Limitant, d'après cette indication et d'après le programme, notre examen à l'usage des sinus et cosinus, nous trouvons, à la simple lecture, que

$$\log \sin 17^\circ\ 23' = \log \cos 72^\circ\ 37' = 9{,}4753271,$$
$$\log \sin 34^\circ\ 29' = \log \cos 55^\circ\ 31' = 9{,}7529442.$$

La différence entre les logarithmes des sinus et cosinus des angles consécutifs qui diffèrent entre eux d'une minute, est placée dans une colonne spéciale à la droite de l'espace qui sépare ces deux logarithmes; comme pour les logarithmes des nombres, ces différences expriment des unités décimales du septième ordre, et leur emploi se fait aussi par le moyen d'une proportion, dans les calculs relatifs à des angles dont l'expression contient des secondes ou parties de seconde.

Cela posé et ainsi borné à ce qui se rapporte aux sinus

et cosinus, l'usage des Tables n'offre aucune difficulté, comme on va le voir par les exemples suivants :

PROBLÈME I^er^. Soit à *calculer le logarithme du sinus de* 37° 5′ 9″.

Ce logarithme tombe entre log sin 37° 5′, qui est 9,7803000, et log sin 37° 6′, lesquels diffèrent entre eux, d'après la table, de 0,0001671. Comme pour les nombres, nous aurons ce qu'il faut ajouter au log sin 37° 5′, pour avoir celui qui est cherché, en établissant la proportion

$$60'' : 9'' :: 0{,}0001671 : x, \text{ d'où } x = 0{,}0000251.$$

Par conséquent,

$$\log \sin 37^\circ\, 5'\, 9'' = 9{,}7803000 + 0{,}0000251 = 9{,}7803251.$$

Remarque. Il est entendu que, si l'angle donné était obtus, il faudrait le remplacer par son supplément qui a même sinus que lui.

Soit encore à *calculer log cos* 52° 54′ 51″.

Un premier moyen se présente qui consiste à considérer, au lieu du cosinus de 52° 54′ 51″, le sinus de son complément 37° 5′ 9″; c'est l'exemple précédent.

Pour opérer directement, la méthode est la même que pour le sinus, avec cette différence que, le cosinus diminuant à mesure que l'angle augmente, il faut retrancher le résultat de la proportion du logarithme correspondant au plus petit des deux angles qui comprennent l'angle donné.

Ainsi, l'angle donné étant compris entre 52° 54′ et 52° 55′, le logarithme cosinus cherché tombe entre les logarithmes tabulaires de ces deux angles, c'est-à-dire entre 9,7804671 et 9,7803000, qui diffèrent de 0,0001671.

La proportion

$$60 : 51 :: 0{,}0001671 : x$$

donne $x = 0{,}0001420$ qu'il faut retrancher de 9,7804671, et le reste 9,7803251 est le log cos 52° 54′ 51″ cherché.

Problème II. *Calculer l'angle dont le log sin est* 9,7803251.

Pour la facilité des recherches, remarquons que le logarithme en question est plus petit que le logarithme 9,8494850 de sin 45°; l'angle qui nous occupe est donc moindre que 45°, et nous devons chercher le logarithme donné dans les colonnes dont le titre supérieur est *sinus;* nous trouvons ainsi qu'il tombe entre les logarithmes tabulaires 9,7803000 et 9,7804671 de sin 37° 5′ et sin 37° 6′; l'angle cherché est donc composé de 37° 5′, plus un nombre de secondes ou parties de seconde qu'il s'agit de calculer. La proportion à poser dans ce cas est celle-ci :

0,0001671, différence tabulaire : 0,0000251, différence entre le logarithme donné et le logarithme tabulaire immédiatement inférieur :: 60″ : x;

d'où $x = 9''$.

L'angle cherché est donc 37° 5′ 9″.

Comme deuxième exemple, *cherchons l'angle dont le log cos est* 9,4755274.

Ce logarithme étant moindre que 9,8494850, c'est-à-dire moindre que log cos de 45°, l'angle cherché est plus grand que 45°; nous devons donc chercher le logarithme donné dans la colonne verticale dont le titre inférieur est cosinus.

Ce logarithme tombe entre 9,4757304 et 9,4753271 qui correspondent respectivement à cos 72° 36′ et cos 72° 37′

et qui diffèrent entre eux de 0,0004033; la proportion qui donne ce qu'il faut retrancher à l'arc 72° 37′ est donc la suivante :

$$0{,}0004033 : 0{,}0002030 :: 60'' : x \text{ et donne } x = 30'',198.$$

L'angle cherché est par conséquent

$$72° 37' - 30'',198, \text{ ou } 72° 36' 29'',802.$$

120. Les tables de Callet sont disposées d'une façon tout à fait analogue à celles de Reynaud, dont elles ne diffèrent essentiellement qu'en ce qu'elles contiennent les logarithmes des lignes trigonométriques des angles de dix en dix secondes pour tout le quart de cercle. On y remarque les degrés écrits hors du cadre en haut et en bas de chaque page; les minutes et secondes qu'on voit à la première et à la seconde colonne se rapportent aux degrés qui sont écrits en haut; les minutes et secondes qu'on trouve à l'avant-dernière et à la dernière colonne se rapportent aux degrés qui sont marqués au bas de la page.

La manière d'opérer avec cette table est absolument la même que pour celle de Reynaud, à laquelle elle est supérieure, 1° en ce qu'elle donne des résultats plus exacts, puisqu'elle fournit, calculés par des moyens directs, les éléments relatifs à des arcs croissants de 10″ en 10″ et qu'elle restreint ainsi considérablement l'étendue des intervalles dans lesquels on est obligé d'avoir recours à une proportion plus ou moins rigoureuse; 2° en ce que, ces intervalles étant moindres, la proportion, plus exacte en elle-même, s'établit en outre entre des différences moindres et présente toujours un terme égal à 10, circonstances qui rendent les calculs d'autant plus faciles et plus prompts.

Nous allons répéter, en nous servant des tables de Callet, la solution des deux problèmes précédents.

PROBLÈME I BIS. *Calculer le logarithme du sinus de* 39° 23′ 47″.

La table fournit pour celui de 39° 23′ 40″ le nombre 9,8025381, et pour la différence avec celui de 39° 23′ 50″ la quantité 0,0000256. La proportion différentielle à établir est donc

$$10 : 7 :: 0{,}0000256 : x,$$

d'où

$$x = 0{,}00001792,$$

et le logarithme cherché devient ainsi

$$9{,}8025381 + 0{,}0000179 \text{ ou } 9{,}8025560.$$

Remarquons en passant que les calculs exigés par la proportion ci-dessus peuvent se traduire en une règle générale fort simple; ils reviennent en effet à *multiplier la différence tabulaire par la partie de l'angle donné qui excède le nombre des dizaines de secondes, à supprimer le dernier chiffre à droite du produit et à ajouter le reste au logarithme inférieur, en considérant ce reste comme exprimant des unités décimales du septième ordre.*

Si le nombre donné renferme, outre les secondes, des tierces, des quartes, etc., on réduira ces subdivisions sexagésimales de la seconde en parties décimales et l'on opérera comme il a été dit plus haut; seulement, dans la pratique, au lieu de retrancher purement et simplement un chiffre à droite du produit des différences, on comprend que, ce produit renfermant nécessairement des figures décimales en nombre indéterminé et variable, la division par 10 devra

se faire en avançant la virgule d'un rang vers la gauche, et non plus en supprimant un chiffre à droite.

PROBLÈME II BIS. *Déterminer à quel angle appartient le log sin* 9,8025560.

Cherchant ce logarithme dans les colonnes *sinus* de la table, nous trouvons qu'il est compris entre 9,8025381 et 9,8025637, qui appartiennent respectivement aux angles 39° 23′ 40″ et 39° 23′ 50″, et qui diffèrent entre eux de 256 unités du septième ordre.

Le logarithme donné différant de celui qui lui est immédiatement inférieur de 179 unités du même ordre, la proportion

$$256 : 179 :: 10 : x$$

nous donne $x = 6'',99$, et l'angle cherché est 39° 23′ 46″,99 ou sensiblement 39° 23′ 47″.

On obtient ainsi généralement les unités de secondes et les parties décimales de seconde, qu'il est ensuite facile de convertir, s'il en est besoin, en subdivisions sexagésimales.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

121. *Etant donnés trois des six éléments linéaires ou angulaires d'un triangle, déterminer numériquement les trois autres;* tel est le but spécial de la trigonométrie; tel est le problème qui nous reste maintenant à traiter et qui porte le nom de *résolution des triangles.* Hâtons-nous d'ajouter que ce problème n'est susceptible d'une solution complète qu'à cette condition que, parmi les trois données,

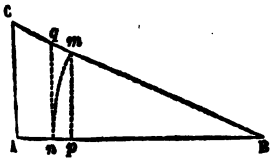
il entre au moins un côté; car la géométrie nous enseigne que la connaissance des trois angles d'un triangle ne suffit pas pour le déterminer, puisque tous les triangles semblables ont leurs trois angles égaux chacun à chacun.

Cela posé, nous allons examiner successivement le cas où, le triangle proposé étant rectangle, deux autres données, dont un côté, suffisent, et celui où le triangle n'a que des angles aigus ou obtus. Nous commencerons toutefois par établir, au moyen des vérités précédemment démontrées, des relations qui lient entre eux les angles et les côtés de tout triangle et, pour simplifier autant que possible les calculs, nous conviendrons, comme il est d'usage de le faire, de désigner invariablement les trois angles par A, B, C et par *a*, *b*, *c* les côtés respectivement opposés à ces angles; il sera de plus admis que, s'il s'agit d'un triangle rectangle, c'est toujours l'angle A qui sera droit et, par conséquent, *a* l'hypoténuse.

RELATIONS ENTRE LES CÔTÉS ET LES ANGLES D'UN TRIANGLE.

122. Théorème I. *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent ou par le sinus de l'angle opposé.*

Fig. 77.



Soit en effet pris $m\mathrm{B}=1$ et soit décrit, avec ce rayon, l'arc de cercle *mn*, puis tracé le sinus *mp* de l'angle B. Les triangles semblables ABC, B*mp* donnent

$$\mathrm{AC} : mp :: \mathrm{BC} : 1,$$

ou

$$b : \sin\mathrm{B} :: a : 1,$$

d'où l'on tire $b = a \sin B = a \cos C$,

puisque, B et C étant complémentaires, $\sin B = \cos C$.

On a de même $c = a \sin C = a \cos B$.

123. Théorème II. *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier ou par la cotangente de l'angle opposé au second.*

Cette vérité peut se déduire de la précédente, puisque des égalités $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, on déduit immédiatement

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin B}{a \cos B} = \text{tang } B,$$

d'où $b = c \text{ tang } B = c \cot C$,

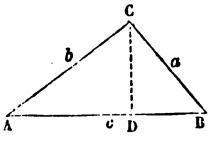
puisque, B et C étant complémentaires, $\text{tang } B = \cot C$.

On a de même $c = b \text{ tang } C = b \cot B$.

La démonstration peut d'ailleurs aussi se faire directement en menant sur la figure la tangente *nq* de l'angle B, et en comparant les triangles semblables ABC et B*nq*.

124. Théorème III. *Dans tout triangle, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés.*

Fig. 78.



Pour le prouver, d'un sommet C du triangle ABC tirons la perpendiculaire CD sur le côté opposé *c*; cette perpendiculaire détermine deux triangles rectangles ACD, BCD qui fournissent, en vertu du Théorème I^er^,

l'un $CD = b \sin A$, l'autre $CD = a \sin B$.

d'où $$b \sin A = a \sin B.$$

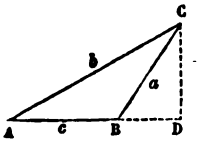
De là la proportion $a : b :: \sin A : \sin B$.

On ferait une démonstration analogue en prenant l'un des deux autres sommets A et B pour abaisser la perpendiculaire, et il serait facile d'établir ainsi que

$$a : b : c :: \sin A : \sin B : \sin C,$$ c. q. f. d.

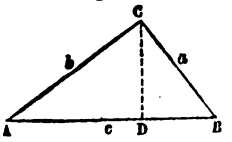
Observation. Quand la perpendiculaire CD tombe en dehors du triangle, le triangle rectangle BCD n'a pas d'angle qui fasse directement partie de ceux du triangle ABC; mais les angles B de ces deux triangles sont adjacents et supplémentaires, et par conséquent leurs sinus sont égaux; la démonstration précédente s'applique donc encore à ce cas.

Fig. 79.



125. Théorème IV. *Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, moins le double rectangle de ces deux derniers multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Fig. 80.



En effet, si l'on abaisse la perpendiculaire CD, les triangles rectangles BCD, ACD donnent

l'un $$a^2 = \overline{CD}^2 + (c - AD)^2 = \overline{CD}^2 + c^2 + \overline{AD}^2 - 2c \times AD,$$

l'autre $$\overline{AD}^2 = b^2 - \overline{CD}^2;$$

d'où, par substitution,

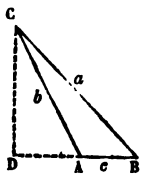
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD.$$

Mais le triangle ACD fournit encore (122)

$$AD = b \cos A;$$

donc enfin, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, c. q. f. d.

Fig. 81.



Si l'angle A était obtus, la formule resterait la même; dans ce cas, en effet, la perpendiculaire CD tomberait en dehors du triangle et l'on aurait, d'une part,

$$a^2 = \overline{CD}^2 + (c + AD)^2 = CD^2 + c^2 + AD^2 + 2c \times AD,$$

de l'autre, $\overline{AD}^2 = b^2 - \overline{CD}^2$;

d'où $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD.$

Mais $AD = b \cos CAD$ et, cet angle CAD étant le supplément de l'angle A du triangle, les cosinus de ces deux angles sont égaux et de signes contraires; on a donc

$$AD = -b \cos A,$$

et par suite encore,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

126. Problème I. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et l'un des angles aigus* B, *par exemple.*

Il s'agit de déterminer, 1° le deuxième angle aigu C qui est le complément de B et égal, par conséquent, à $90° - B$;

2° les deux côtés de l'angle droit b et c, lesquels (122) sont donnés par les relations $b = a \sin B$, $c = a \cos B$.

La substitution des valeurs données de a et B dans ces expressions et l'emploi des logarithmes conduiront immédiatement aux valeurs numériques de b et c.

127. Problème II. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté* b *et l'angle aigu opposé* B.

Comme dans le problème précédent, $C = 90° - B$.

La même relation $b = a \sin B$ donne $a = \frac{b}{\sin B}$.

Enfin, une fois a calculé, la relation $c = a \cos B$ fournira la valeur de c.

Remarque. Si nous tenions à déterminer chacun des éléments cherchés par des moyens spéciaux et indépendamment de la détermination précédemment faite des autres inconnues, ce qui, il faut l'avouer, aurait l'avantage de fournir de précieuses vérifications, nous devrions avoir recours à l'usage des tables des tangentes et cotangentes qui, d'après le programme, n'ont pas dû trouver place dans ce travail. Dans le cas précédent, le n° 123 nous donnerait la relation $c = b \cot B$.

128. Problème III. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et un autre côté* b.

Le côté c sera donné par la relation connue

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)};$$

l'équation $b = a \sin B$ donnera

$$\sin B = \frac{b}{a};$$

puis enfin, $C = 90° - B$.

Remarque. L'angle B obtenu par son sinus est déterminé sans aucune incertitude possible, puisque cet angle, faisant partie d'un triangle rectangle, ne saurait être confondu avec son supplément, qui est nécessairement obtus.

129. Problème IV. *Résoudre un triangle rectangle, connaissant les deux côtés* b *et* c *de l'angle droit.*

L'hypoténuse a est de suite fournie par la relation

$$a=\sqrt{b^2+c^2}.$$

Ensuite, comme dans le cas précédent, B sera tiré de la formule $b=a\sin B$ qui donne

$$\sin B=\frac{b}{a};$$

enfin,
$$C=90^\circ-B,$$

ou, si l'on veut, $c=a\sin C$, d'où $\sin C=\frac{c}{a}$.

La *remarque* faite au numéro précédent trouve encore ici son application en ce qui concerne les angles B et C.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES.

130. Problème I. *Résoudre un triangle, connaissant deux angles* A *et* B *et le côté* a *opposé à l'un d'eux.*

Dans tout triangle, la somme des angles étant égale à 180°, on a de suite

$$C=180^\circ-(A+B);$$

les trois angles sont donc connus.

D'après le théorème 3 (124), on peut poser ensuite les proportions

$$\sin A : \sin B :: a : b, \text{ d'où } b = a\frac{\sin B}{\sin A},$$

$$\sin A : \sin C :: a : c, \text{ d'où } c = a\frac{\sin C}{\sin A},$$

et toutes les inconnues se trouvent déterminées.

131. Problème II. *Résoudre un triangle, connaissant deux côtés* a *et* b *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux.*

De la proportion $\sin A : \sin B :: a : b$

nous tirons sur-le-champ $\sin B = \frac{b}{a}\sin A$;

nous avons ensuite $C = 180^\circ - (A+B)$,

puis, $\sin A : \sin C :: a : c$, d'où $c = a\frac{\sin C}{\sin A}$,

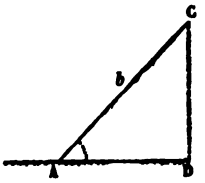
132. *Discussion.* Cette solution demande quelques éclaircissements : en effet, l'angle B a été obtenu par son sinus qui correspond à deux angles supplémentaires dont l'un est aigu, l'autre obtus. Or, la question posée ne sera complétement résolue que quand nous saurons avec précision lequel des deux angles convient aux données, ou s'il faut les admettre tous les deux comme formant deux solutions distinctes, ou enfin si, par suite d'incompatibilité dans les données, la question n'est susceptible d'aucune solution.

Cette dernière circonstance se présentera nécessairement quand, a étant plus petit que $b \sin A$, la valeur qui en résulterait pour $\sin B$ serait plus grande que 1 ; la condition pour que la question admette au moins une solution est donc écrite dans la relation

$$a \geqq b \sin A.$$

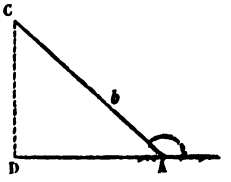
Cette condition est du reste identique avec celle que

Fig. 82.



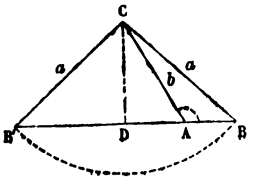
fournit la géométrie, quand on veut construire avec les données le triangle lui-même; on fait en effet un angle A en un point d'une ligne indéterminée; on prend sur le côté ainsi tracé et à partir du point A une longueur CA=b; puis, du point C, avec un rayon égal à a, on décrit un arc qui coupe la ligne indéterminée en deux points, qui la touche en un seul ou qui ne la rencontre pas, selon que le côté a est supérieur, égal ou inférieur à la perpendiculaire CD, laquelle n'est autre que $b \sin A$, soit que l'angle A soit aigu, soit que, cet angle étant obtus, la perpendiculaire tombe du côté de son supplément.

Fig. 83.



Voyons maintenant ce que devient la condition ci-dessus suivant les diverses valeurs de A, c'est-à-dire selon que cet angle est obtus, droit ou aigu.

Fig. 84.

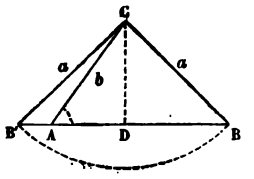


1° *Si l'angle* A *est obtus ou droit*, l'angle inconnu B est nécessairement aigu, et toute incertitude est levée sur celle des deux valeurs qu'il faut admettre pour l'angle correspondant à $\sin B$; il y a donc, dans ce cas, une solution unique; c'est le triangle ABC de la figure ci-contre.

Il est bien entendu que le côté a, qui est donné, doit être forcément plus grand que le côté b aussi donné, puisque l'angle B est nécessairement plus petit que l'angle A; si cette condition n'était pas remplie, la question serait

insoluble, à cause de l'incompatibilité manifeste des données.

Fig. 85.

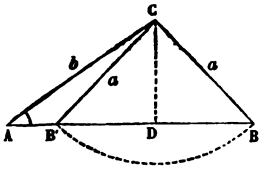


2° *L'angle* A *étant aigu*, le côté a peut être supérieur, égal ou inférieur à b.

Si $a > b$, l'angle A est encore plus grand que l'angle B, qui est par conséquent aigu, et il y a une solution unique ABC qui ne saurait embarrasser.

Si $a = b$, le triangle est isoscèle et l'angle B est égal à l'angle A.

Fig. 86.



Mais si $a < b$, l'angle B, qui est plus grand que l'angle aigu A, peut être lui-même aigu ou obtus, et il y a alors deux solutions ABC, AB'C qui ne se réduisent à une seule que pour le cas limite où, a étant égal à $b \sin A$, les deux côtés CB et CB' se confondent en un seul CD perpendiculaire sur le troisième côté.

133. Si, au lieu de commencer par déterminer les angles B et C, puis le côté c au moyen de l'angle C, on avait désiré se procurer ce côté en fonction des seules données, on aurait eu recours à la formule suivante, établie au n° 125 :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ;$$

elle représente une équation du deuxième degré par rapport à l'inconnue c, et sa résolution donne

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 A} = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

L'examen de cette expression conduit aux mêmes consé-

quences que la valeur de sin B précédemment trouvée, puisque la condition nécessaire pour que la valeur de c soit réelle est, comme l'enseignent les principes élémentaires de l'Algèbre, que la quantité sous le radical soit nulle ou positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$a^2 \gtrless b^2 \sin^2 A \text{ ou } a \gtrless b \sin A.$$

134. Problème III. *Résoudre un triangle dans lequel on connaît deux côtés* a *et* b *et l'angle* C *compris par ces côtés.*

La formule du n° 125 nous fournit sur-le-champ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \text{ d'où } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

Connaissant ainsi le côté c, on obtiendra facilement A par la proportion

$$\sin A : \sin C :: a : c;$$

puis enfin, $$B = 180^\circ - (A + C).$$

135. Si nous pouvions sortir des Tables de sinus, nous donnerions comme préférable la solution suivante, qui a l'avantage de déterminer directement et à la fois A et B en fonction des côtés donnés a et b et de l'angle C.

Nous poserions à cet effet la proportion à deux inconnues A et B,

$$\sin A : \sin B :: a : b,$$

laquelle se transforme, par une propriété connue des proportions, en celle-ci :

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: a + b : a - b,$$

et nous remplacerions encore cette dernière, au moyen d'une formule établie au n° 116, par la suivante :

$$\text{tang}\frac{A+B}{2} : \text{tang}\frac{A-B}{2} :: a+b : a-b.$$

Or, quoique A et B soient tous deux inconnus, nous savons que leur somme est le supplément de l'angle donné C, en sorte que

$$A+B=180^\circ-C.$$

La proportion qui précède ne renferme donc plus d'inconnu que le terme $\text{tang}\frac{A-B}{2}$, et elle donne la valeur

$$\text{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\text{tang}\frac{180^\circ-C}{2},$$

de laquelle on déduit A—B.

La somme et la différence des angles A et B étant alors connues, ces angles le sont par là même, et cette solution a en outre l'avantage de se prêter mieux que la première au calcul logarithmique.

136. Problème IV. *Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.*

Des formules

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \text{ on tire } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \qquad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C, \qquad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Pour vérification, on s'assure ensuite que les valeurs de A, B, C déterminées ainsi satisfont à la condition de rigueur

$$A+B+C=180^\circ.$$

137. Les trois valeurs ci-dessus de cos A, cos B, cos C, ont l'inconvénient de ne pas admettre commodément l'emploi des logarithmes; mais il est facile de les transformer en d'autres beaucoup plus favorables sous ce rapport. Souvenons-nous en effet (108) que $2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$, et mettons dans cette relation la valeur de cos A que nous venons de trouver; il viendra

$$2\sin^2\frac{A}{2}=$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

d'où nous tirons, en extrayant la racine carrée :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

et, si l'on pose $a+b+c=2p$,

d'où $a+b-c=2(p-c)$ et $a-b+c=2(p-b)$,

il vient enfin $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

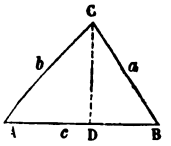
Les mêmes calculs conduisent à

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Remarquons encore que les trois angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ et $\frac{C}{2}$ étant nécessairement aigus, il ne peut y avoir d'incertitude sur le choix entre les deux angles respectivement fournis par les valeurs de $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$ et $\sin\frac{C}{2}$ et, par suite, il n'y a aucun doute possible sur les valeurs à prendre pour A, B et C.

138. Comme corollaire du numéro précédent, nous al-

Fig. 87.



lons montrer comment les transformations qui y ont été faites conduisent à une expression très-remarquable de la surface d'un triangle en fonction seulement de ses trois côtés.

Cette surface est en effet, comme l'on sait,

$$S=\frac{1}{2}AB\times CD=\frac{1}{2}c\times b\sin A,$$

ou, en remplaçant sin A par sa valeur $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ (108)

$$S=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Or, nous savons déjà que

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

et la valeur de $\cos\frac{A}{2}$ tirée de celle-ci se réduit à

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

nous avons donc, en substituant dans S,

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

formule simple et symétrique par rapport aux trois côtés a, b, c et qui, appliquée comme exemple aux données

$$a=2^{m},\ b=1^{m},80 \text{ et } c=1^{m},70,$$

donne $S=\sqrt{2,75\times0,75\times0,95\times1,05}=1^{m.q.}43.$

139. Enfin, nous terminerons par une application numérique de résolution d'un triangle et nous choisirons le *cas douteux* (131).

Soit donc proposé de résoudre le triangle dans lequel on connait

$$a=2^{m},50,\ b=3^{m},20 \text{ et } A=46^{o}\ 21'\ 35''.$$

Calculant d'abord B par la formule

$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A,$$

qui devient, par l'application des logarithmes :

$$\log \sin B=\log b+\log \sin A-\log a,$$

nous avons

$$\left.\begin{array}{l}\log b=\log 3,20\ldots\ldots=0,5051500\\ \log \sin A=\log \sin 46^{o}\ 21'\ 35''=9,8595507\\ \log a=\log 2,50\ldots\ldots=\ldots\ldots\ 0,3979400\end{array}\right\}\begin{array}{l}10,3647007\\ \\ \end{array}\left\}\begin{array}{l}9,9667607=\log \sin 67^{o}\ 52'\ 5''\\ \\ \end{array}\right.$$

B étant ainsi égal à $67^{o}\ 52'\ 5'',41$, on a

$$A+B=46^{o}\ 21'\ 35''+67^{o}\ 52'\ 5'',41=114^{o}\ 13'\ 40'',41,$$

et, par suite,

$$C=180^{o}-(A+B)=65^{o}\ 46'\ 19'',59.$$

Il reste maintenant à trouver c qui vient de la formule $c=a\frac{\sin C}{\sin A}$; on en tire

$$\log c=\log a+\log \sin C-\log \sin A,$$

et l'application numérique de cette relation aux données se fait comme il suit :

$$\left.\begin{array}{l}\log a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,3979400\\ \log \sin C=\log \sin 65^{o}\ 46'\ 19'',59=9,9599569\\ \log \sin A=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ 9,8595507\end{array}\right\}\begin{array}{l}10,3578919\\ \\ \end{array}\left\}\begin{array}{l}0,4983462=\log 3,15.\\ \\ \end{array}\right.$$

En rapprochant des données les résultats obtenus, nous

voyons que les éléments du triangle dont il s'agit se résument ainsi :

$a=2^m,50$,	$A=46^\circ\ 21'\ 35''$,
$b=3^m,20$,	$B=67^\circ\ 52'\ 5'',41$,
$c=3^m,15$,	$C=65^\circ\ 46'\ 19'',59$.

140. Comme on l'a vu dans la discussion générale (132), il y a ici lieu d'examiner attentivement les diverses circonstances de la question posée. Sans rentrer dans les déductions précédemment établies, nous pouvons dire sur-le-champ que, l'angle donné A étant aigu et le côté donné a plus petit que b, il y a nécessairement deux solutions, c'est-à-dire un second triangle satisfaisant aux données et dont l'angle B′ est le supplément $112^\circ\ 7'\ 54'',59$ de l'angle B déterminé plus haut. L'angle C′ de ce second triangle sera, comme pour le premier, le supplément de la somme A+B′ et égal par suite à $21^\circ\ 30'\ 30'',41$.

Enfin, le côté c' sera fourni par la relation $c'=a\frac{\sin C'}{\sin A}$,

ou $$\log c'=\log a+\log\sin C'-\log\sin A,$$

et se calculera de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\log a=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,3979400\\ \log\sin C'=\log\sin 21^\circ\,30'\,30'',41=9,5642380\\ \log\sin A=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=9,8595507\end{array}\right\}\begin{array}{l}9,9621780\\ \\ \end{array}\Bigg\}0,1026273=\log 1,27.$$

Les six éléments de ce nouveau triangle sont donc :

$a=2^m,50$,	$A=46^\circ\ 21'\ 35''$,
$b=3^m,20$,	$B'=112^\circ\ 7'\ 54'',59$,
$c'=1^m,27$,	$C'=21^\circ\ 30'\ 30'',41$.

141. Quand on a résolu un triangle, comme nous venons de le faire, il est bon de soumettre les résultats à quelques

vérifications sommaires, capables de faire reconnaître les erreurs capitales, s'il s'en était glissé.

Dans ce but, on s'assure d'abord généralement que les trois angles forment exactement une somme égale à 180°; mais, dans le cas présent où nous avons calculé l'angle C d'après cette condition, la vérification tirée de cette condition elle-même serait naturellement illusoire.

On examine en outre si *à un plus grand angle* correspond bien *un plus grand côté;* cette condition est satisfaite dans nos deux triangles. Mais une vérification plus sérieuse nous est offerte ici; elle consiste à calculer directement c (133 par la formule

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}.$$

Cette expression n'est pas directement calculable par logarithmes et il serait facile de la transformer dans ce sens; mais ces transformations sortant du cadre qui nous est tracé par le programme, nous allons calculer séparément chacun des termes dont elle se compose :

$$\left.\begin{array}{l}\log b = \ldots\ldots\ldots = 0{,}5051500 \\ \log\cos A = \log\cos 46^\circ\,21'\,35'' = 9{,}8389521\end{array}\right\} 10{,}3441021,$$

et, à cause du rayon 10^{10} dont il faut retrancher le logarithme 10, nous avons

$$\log b\cos A = 0{,}3441021,$$

qui donne $$b\cos A = 2{,}2085.$$

D'une autre part,
$$\left.\begin{array}{l}\log b = 0{,}5051500 \\ \log\sin A = 9{,}8595507\end{array}\right\} 10{,}3647007;$$

d'où, comme ci-dessus,

$$\log b \sin A = 0{,}3647007.$$

qui donne $$b \sin A = 2{,}3158.$$

Cela posé, le radical $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$, si l'on y met pour a la valeur donnée et, pour $b \sin A$, celle que nous venons de trouver, devient 0,9418.

Enfin, la double valeur de c se résume dans l'expression

$$c = 2{,}2085 \pm 0{,}9418;$$

c'est-à-dire,

$$c = 3{,}1503 \text{ ou } 3{,}15 \text{ et } c' = 1{,}2667 \text{ ou } 1{,}27,$$

résultats conformes à ceux précédemment obtenus.

Remarque essentielle. Pour les calculs logarithmiques des n^os^ 139 et 140, nous n'avons pas eu à nous occuper d'introduire (100 et 118) dans les formules le rayon tabulaire 10^{10}, par la raison que les relations employées n'eussent été nullement modifiées par cette introduction, ainsi qu'on peut le voir en remplaçant, dans la formule $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$, par exemple,

$$\sin B \text{ par } \frac{\sin B}{R} \text{ et } \sin A \text{ par } \frac{\sin A}{R}.$$

Mais il n'en est généralement pas ainsi, et il ne faut jamais perdre de vue que, sauf les cas particuliers, toutes les formules qui lient les lignes trigonométriques naturelles entre elles ou avec d'autres quantités, demandent à être préparées algébriquement avant l'emploi des tables logarithmiques. Toutefois, avec un peu d'habitude, on se dispense le plus souvent d'effectuer ces transformations préalables et les corrections nécessaires se font au cours des calculs; une omission de cette nature serait d'ailleurs bientôt signalée par des anomalies grossières et les résultats ne sauraient jamais en être affectés.

LEVER DES PLANS.

142. L'opération du *lever des plans* a pour objet de déterminer et de reproduire, sur un plan perpendiculaire à la verticale du lieu (42), la configuration d'une portion de la surface de la terre ou, si l'on veut, les positions relatives de plusieurs points de cette surface, abstraction faite de leur hauteur; en un mot, l'ensemble des projections horizontales de ces points. Il doit être entendu que nous ne voulons parler ici que des levers qui n'embrassent pas une assez grande étendue, pour que la sphéricité de la terre apporte un obstacle à la représentation sur un plan de la portion de la surface considérée.

Quoi qu'il en soit, on peut concevoir tous les points qu'il s'agit de rapporter, reliés entre eux par des lignes droites, et cet ensemble constitue un réseau de triangles dont les éléments, les uns mesurés directement sur le terrain, les autres calculés au moyen des premiers par les procédés trigonométriques, déterminent complétement les positions desdits points et servent de base à une représentation aussi fidèle que possible de la projection des lieux.

Cette division du sol en triangles et la suite des opérations nécessaires pour arriver à en connaître numériquement les divers éléments tant linéaires qu'angulaires, constituent ce qu'on appelle une *triangulation*.

On voit sans peine, d'après cet exposé, que le point de départ d'une semblable opération est, d'un côté, la *mesure des distances*, de l'autre, la *mesure des angles*. Nous allons donc examiner successivement les instruments et les méthodes qui servent à résoudre ces deux problèmes.

MESURE DES DISTANCES.

CHAINE D'ARPENTEUR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

143. Les longueurs que l'on a généralement à mesurer sur le terrain sont des lignes droites ou des portions de courbes assez ouvertes pour être considérées comme rectilignes dans l'étendue qu'embrasse l'instrument. Cela posé, la distance entre deux points déterminés se mesure le plus souvent au moyen de la *chaîne d'arpenteur*.

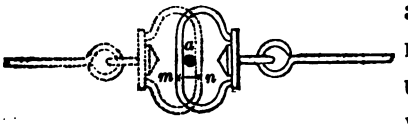
Cet instrument est formé de chaînons ou tiges en gros fil de fer dont chaque bout est recourbé en boucle et qui sont réunis deux à deux par un anneau; les longueurs des tiges, des boucles et des anneaux sont déterminées de manière qu'entre les centres de deux anneaux consécutifs la longueur entière soit de 20 centimètres; comprenant presque toujours 50 chaînons, quelquefois 100, la chaîne d'arpenteur représente donc le plus fréquemment 1 décamètre et, dans le second cas, 1 double décamètre ou 20 mètres.

Dans le but de rendre plus commode la lecture des fractions de décamètre, les anneaux placés de mètre en mètre sont en cuivre et celui du milieu porte en outre, comme marque distinctive, un petit appendice en métal. Enfin, pour faciliter l'emploi de cet instrument, dont nous donnons un dessin détaillé (pl. I, fig. 1 et 2), chaque bout de la chaîne a une

poignée dont la longueur est prise sur les 20 centimètres du dernier chaînon.

144. Pour mesurer une distance, on commence par la *jalonner;* cette opération préliminaire consiste à tracer sur le terrain, au moyen de piquets ou de brins de bois surmontés d'un morceau de papier destiné à fixer le regard et nommés *jalons*, la ligne suivant laquelle se développe la longueur cherchée; se plaçant ensuite au premier jalon, l'opérateur tient et arrête au point de départ une des poignées de la chaîne, tandis que son aide, appelé *porte-chaîne*, marche en avant dans l'alignement, emportant l'autre poignée. Puis, après s'être assuré que la chaîne est complétement et régulièrement étendue, celui-ci, s'effaçant pour que l'opérateur puisse vérifier si la direction jalonnée a été bien suivie, et, plaçant d'une main la poignée à fleur du sol, pique en terre, au point *a* de l'intérieur de la poignée, une fiche en fer qui servira de point de départ à la mesure du second décamètre.

Fig. 88.



La poignée d'arrière étant, dans la mesure du second décamètre, arrêtée à la face *arrière* de la fiche, de même que, dans l'opération précédente, la poignée d'avant était arrêtée à la face *avant* de cette même fiche, il est clair que l'on perd chaque fois, sur la dimension de la chaîne, une longueur *mn* égale à l'épaisseur de la fiche, augmentée du double de l'épaisseur du fil de fer de la poignée. C'est pour cela surtout que l'on donne généralement à la chaîne, de dehors en dehors, une longueur de $10^{m},005$ au lieu de 10 mètres.

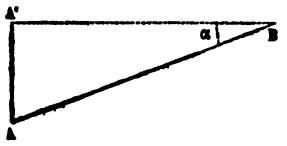
L'agent principal enlève la fiche après la mesure de

chaque décamètre et, quand il se trouve avoir en main les 10 fiches remises avant l'opération au porte-chaîne, il les lui remet de nouveau, en inscrivant une dizaine de décamètres ou *portée*.

145. L'effort constamment exercé pour tendre la chaîne finit par allonger les anneaux et les boucles; il faut donc, dans les opérations qui exigent de l'exactitude, vérifier fréquemment la longueur de la chaîne sur une longueur préalablement préparée avec soin pour servir d'*étalon*.

146. Si le terrain est ondulé, on tâche de développer la chaîne dans un plan horizontal élevé au-dessus des inégalités du sol, en maintenant les poignées dans les verticales passant par les fiches; mais, quoi qu'on fasse en pareil cas pour la tendre en ligne droite, elle prend toujours une courbure assez prononcée; c'est pour ce motif que, quand il s'agit d'une longue pente régulièrement inclinée, il vaut mieux mesurer la longueur suivant la pente, dont on détermine ensuite l'inclinaison par les moyens qui seront indiqués plus loin; un calcul très-simple permet alors de réduire la distance mesurée AB à l'horizontale A'B que l'on cherche.

Fig. 89.



On remarque en effet que, si l'on désigne par α l'angle que fait avec l'horizontale la ligne inclinée AB, le triangle rectangle AA'B fournira (122) la relation

$$A'B = AB \times \cos\alpha.$$

Lors donc qu'on aura mesuré directement AB et qu'on connaîtra la valeur de l'angle α, il suffira, pour avoir la dis-

tance A'B qui, d'après la définition du lever de plan, est un des éléments essentiels de l'opération, de multiplier la première longueur par le cosinus de cet angle.

STADIA. — USAGE ET VÉRIFICATION.

147. Avant de décrire l'instrument qui porte le nom de *stadia*, il importe que nous disions quelques mots sur la construction des lunettes dites *lunettes astronomiques*, qui servent non-seulement à l'observation des astres, comme leur nom l'indique, mais qui entrent encore comme élément essentiel dans un grand nombre d'instruments employés aux opérations géodésiques et topographiques.

La lunette astronomique se compose simplement de deux lentilles de verre enchâssées aux deux extrémités d'un tube. L'un de ces verres, que l'on nomme *objectif*, c'est-à-dire placé du côté de l'objet, a pour but de former une image en un point de l'axe de la lunette où convergent sensiblement tous les rayons lumineux partis des divers points de cet objet. Ce point de convergence est appelé le *foyer principal* de l'objectif ou de la lunette; tous les points de l'objet considéré viennent donc s'y reproduire dans leurs positions respectives; ils y forment une image renversée et beaucoup plus petite que le corps lui-même; le renversement de l'image est un inconvénient dont on cesse de s'apercevoir avec un peu d'habitude; quant à ses dimensions, on les amplifie en la regardant avec un verre grossissant; c'est l'*oculaire* placé à l'autre bout du tube, près de l'œil, et dont la distance à l'image doit être réglée, suivant la portée de la vue de chaque observateur, par un tirage spécial.

148. La stadia peut, dans bien des cas, remplacer avec

avantage la chaîne d'arpenteur et donner même plus de précision que celle-ci, quand il faut la développer sur un terrain accidenté; rarement employée dans le service des ponts et chaussées, elle est surtout utile pour les reconnaissances et les levers à vue.

La construction de cet instrument est fondée sur ce principe que, plusieurs objets de grandeurs différentes étant embrassés par le même angle visuel, les distances qui les séparent de l'observateur sont proportionnelles à leurs dimensions respectives. Si donc l'on forme un angle fixe dans une lunette, soit au moyen d'un diaphragme placé au foyer de l'objectif et percé d'une fenêtre à bords horizontaux, soit simplement par deux fils horizontaux placés au même endroit dans un plan perpendiculaire à l'axe de la lunette, cet angle embrassera une plus ou moins grande longueur d'une règle ou *mire* verticale, suivant que la distance de cette mire au sommet de l'angle sera plus ou moins considérable.

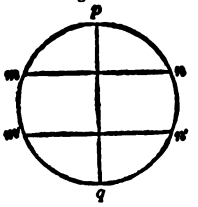
D'après cette disposition, il est facile de voir que, si la mire est graduée convenablement et marquée de divisions que le grossissement de la lunette permette d'apercevoir à la distance que l'on veut apprécier, rien ne sera plus simple que l'usage de la stadia.

149. La graduation de la mire se fait de la manière suivante : on mesure exactement sur le terrain une longueur de 100 à 200 mètres, et l'on place la lunette à l'une des extrémités de cette ligne; la règle destinée à former la mire est portée et maintenue verticalement à l'autre extrémité. Dans cette position, on marque exactement sur la règle la longueur interceptée par les bords du diaphragme ou par les fils horizontaux qui remplacent ces bords; on divise cette longueur en autant de parties égales qu'il y a d'unités

dans la distance de la lunette à la mire, et l'on trace des divisions égales dans toute la longueur de cette dernière. Pour connaître ensuite, dans tous les cas, la distance qui sépare la lunette de la mire, il suffit de compter le nombre des divisions visibles entre les prolongements des côtés de l'angle de la lunette.

Outre les deux fils horizontaux *mn*, *m'n'* consacrés à la mesure des distances, le porte-fils ou *réticule* a toujours un troisième fil *pq* qui les coupe verticalement et qui n'est pas inutile pour fixer avec précision le rayon visuel de l'observateur sur la mire; il est superflu d'ajouter que cette mire est ordinairement peinte en blanc avec des divisions noires et que des chiffres ou mieux des signes de convention, tels que de gros points placés différemment les uns des autres, sont destinés à aider la lecture.

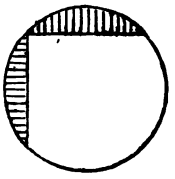
Fig. 90.



150. En résumé, la stadia se compose d'une lunette disposée de manière à contenir un angle invariable, et d'une mire graduée dont les divisions dépendent essentiellement de la grandeur de cet angle. Il résulte de cette corrélation que, si les fils qui déterminent cet angle viennent à se détendre ou à se casser, si les bords de la fenêtre du diaphragme se dérangent par suite d'un accident quelconque, il faut nécessairement refaire une nouvelle graduation pour éviter les erreurs considérables que la plus petite différence dans la position des côtés de l'angle entraînerait dans l'évaluation des distances. On remédie à cet inconvénient à l'aide de l'une des dispositions suivantes qui permettent d'employer des mires divisées en centimètres comme celles qui servent pour les nivellements.

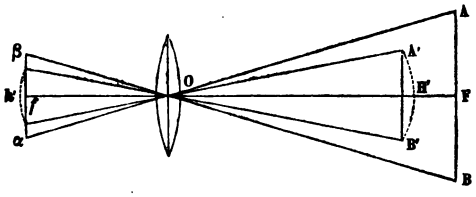
L'une de ces dispositions consiste à remplacer le diaphragme en cuivre ou les fils fixes dont nous venons d'expliquer l'usage, par une plaque de verre sur laquelle est gravée horizontalement et verticalement une division en millimètres; chacun de ces millimètres est lui-même partagé en 8 ou en 10 parties égales que le pouvoir grossissant de l'oculaire permet d'ailleurs de lire et de compter avec la plus grande facilité.

Fig. 91.



Soient alors H la hauteur connue en mètres d'un objet AB, D la distance aussi connue OF de cet objet à l'objectif O de la lunette; h la hauteur de son image $\alpha\beta$, mesurée à l'aide de l'échelle de la plaque de verre placée sur cette image, et enfin φ la distance *of* de l'image à l'objectif, en d'autres termes, la *distance focale* de l'objectif; on a évidemment

Fig. 92.



$$D : \varphi :: H : h,$$

d'où

$$\varphi = D\frac{h}{H}.$$

Connaissant ainsi et une fois pour toutes la constante φ relative à une lunette donnée, si l'on veut mesurer avec le même instrument la distance D′ d'un objet quelconque A′B′, il suffira de lire le nombre h' des divisions interceptées sur l'échelle du diaphragme par une longueur donnée H′ de la

mire placée en A'B', pour conclure immédiatement de la proportion qui précède :

$$D' = \varphi \frac{H'}{h'}.$$

151. L'autre moyen de rendre la graduation de la mire indépendante de l'écartement des fils, consiste à rendre au contraire cet écartement, et avec lui l'angle visuel, dépendant des divisions invariables de la mire, en faisant en sorte que l'un des deux fils soit mobile et puisse prendre la position qui convient à la distance qu'il s'agit de mesurer. Les calculs précédents s'appliquent encore identiquement à cet instrument, et la distance D d'un point auquel une longueur H de la mire donne une image d'une longueur h, est encore donnée par la relation $D = \varphi \frac{H}{h}$, dans laquelle φ a été déterminé comme il a été dit ci-dessus; toute la différence consiste dans le mécanisme qui, à défaut d'une lecture directe sur une plaque graduée, permet de mesurer exactement la hauteur de l'image h ou l'écart des deux fils.

Pour y parvenir, on adapte un *micromètre* (*) à l'instrument; il se compose d'une vis qui fait mouvoir l'un des fils, et d'une aiguille qui parcourt extérieurement un cadran fixé sur le tube de la lunette et divisé en 100 parties égales. A chacune de ses révolutions, cette aiguille fait mouvoir une roue dentée dans laquelle elle engrène; les dents sont numérotées et celle qui porte le zéro est sous la pointe, quand les deux fils coïncident. Après une révolution entière, les fils sont distants d'une quantité égale au pas de la vis qui sert de pivot à l'aiguille, et chaque nouveau tour correspond à un nouveau pas.

(*) On donne en général le nom de *micromètre* à tout appareil propre à mesurer avec précision de très-petites longueurs.

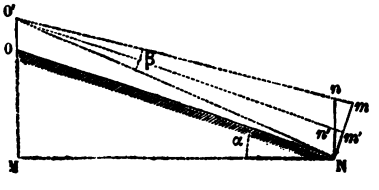
Ainsi, par les combinaisons de cet ingénieux mécanisme, en comptant le nombre des dents qu'a rencontrées l'aiguille et les divisions du cadran qu'elle a parcourues ensuite, on arrive à apprécier l'écartement des fils avec une grande exactitude.

Dans les stadias plus récemment construites par MM. Lerebours et Secrétan, il n'y a pas de roue dentée et l'écartement des deux fils se mesure au moyen de divisions égales au pas de la vis, tracées sur le côté du diaphragme; les fractions du pas de la vis se déterminent toujours au moyen du cadran et de son indicateur. Nous donnons (planc. I, fig. 3, 4, 5 et 6) un dessin d'ensemble et de détail de ce dernier modèle.

152. Les mesures obtenues au moyen de la stadia doivent, comme celles que l'on prend à la chaîne, être ramenées à l'horizontale, quand le terrain est incliné; il y a même ici un double motif; car, outre que l'inclinaison du terrain donne directement une distance plus grande que la véritable, l'obliquité forcée de la mire verticale par rapport à l'axe de la lunette qui est sensiblement parallèle au terrain, exagère encore la portion de cette mire qui se présente entre les fils dans l'angle visuel et de laquelle dépend l'évaluation de la distance.

Soit donc ON la surface d'un terrain faisant avec le plan horizontal MN un angle α que nous apprendrons plus tard à déterminer. L'observateur est en O et OO′ est la hauteur de la lunette au-dessus du sol; la mire étant placée verticalement en N suivant

Fig. 93.



Nn, est oblique par rapport à l'axe de la lunette $O'n'$, et la partie Nn comprise dans l'angle de visée β est trop grande; il faut donc la réduire à Nm perpendiculaire au terrain ON et à l'axe de la lunette.

Pour trouver le rapport de Nm à Nn, remarquons que ces deux longueurs font partie du triangle Nmn dont l'angle en N est égal à α, puisque les côtés de ces angles sont perpendiculaires chacun à chacun. D'un autre côté, le triangle $NO'm$ est isocèle et, par suite, l'angle en m est égal à l'angle $O'Nm$, lequel est égal à l'angle droit mNO moins l'angle ONO', ou, à cause des deux parallèles $O'm'$ et ON, moins $\frac{\beta}{2}$; l'angle en m est donc représenté par $90^o - \frac{\beta}{2}$ et, par suite, l'angle Nnm, qui est le supplément de la somme des deux autres, est égal à $90^o - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)$.

Cela posé, le triangle Nmn nous donne

$$Nm : Nn :: \sin\left(90^o - \alpha + \frac{\beta}{2}\right) : \sin\left(90^o - \frac{\beta}{2}\right),$$

ou, en remplaçant les sinus par les cosinus des angles complémentaires,

$$Nm : Nn :: \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) : \cos\frac{\beta}{2};$$

d'où

$$Nm = Nn\,\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}} = Nn\,\frac{\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = Nn\left(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tang}\frac{\beta}{2}\right).$$

Mais l'angle α étant très-petit dans tous les cas pratiques, son sinus l'est aussi; l'angle de visée β est toujours aussi très-petit et la tangente de sa moitié est à plus forte raison très-petite; d'où il résulte que le produit de ces deux

lignes trigonométriques est négligeable comparativement à $\cos\alpha$ et que l'on peut, sans erreur sensible, poser

$$Nm = Nn\cos\alpha.$$

Telle est donc la valeur de la quantité Nm qui, au lieu de Nn observé directement, doit servir à calculer la véritable longueur ON; ce calcul est facile au moyen de ce qui précède, si l'on remarque que, d'après le principe fondamental sur lequel repose la stadia (148), la distance δ, fournie par la lecture de Nn, est à la distance véritable ON, qui serait fournie par la lecture de Nm, dans le rapport de ces deux quantités, c'est-à-dire que

$$\delta : ON :: Nn : Nm :: Nn : Nn\cos\alpha :: 1 : \cos\alpha;$$

d'où

$$ON = \delta\cos\alpha.$$

Mais enfin, la véritable distance horizontale cherchée MN, que nous appellerons D, est elle-même égale à $ON\cos\alpha$, comme nous l'avons vu pour la chaîne d'arpenteur (146); cette distance est donc, en définitive, égale à

$$\delta\cos^2\alpha.$$

Concluons en résumé que, *pour réduire à l'horizontale une distance δ fournie par la stadia sur un terrain faisant avec l'horizon un angle α, il faut multiplier cette longueur par le carré du cosinus de l'angle.*

Toutefois, dans un grand nombre de circonstances, l'inclinaison α du terrain est assez petite pour que la correction ne porte que sur des fractions de mètre; on la néglige alors, puisque l'erreur provenant de la lecture peut généralement atteindre 1 mètre.

Il est des tables qui donnent toutes les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\cos^2\alpha$ pour les valeurs de α croissantes de minute en

minute entre 0° et 90°; pour abréger les opérations de la correction, on en a même construit qui donnent toutes calculées les valeurs des distances réduites à l'horizontale, au moyen de l'angle de pente du terrain et du nombre de mètres indiqué par la lecture. Toutes ces tables peuvent être d'une grande utilité, quand on a des distances nombreuses à mesurer dans un pays très-accidenté, et leur usage est trop simple pour que nous ayons besoin d'insister sur ce sujet.

MESURE DES ANGLES.

153. La mesure proprement dite des angles a pour objet de les rapporter à l'unité angulaire adoptée; cette unité est la 360^{me} partie de la circonférence ou le *degré* qui se subdivise en 60 minutes; chacune de celles-ci se partage en 60 secondes; la seconde vaut 60 tierces, et ainsi de suite. La notation admise pour chacune de ces parties ressort des énonciations suivantes : la circonférence vaut 360°; 1° vaut 60′; 1′ vaut 60″; 1″ vaut 60‴, etc.

Il existe aussi une division de la circonférence en 400 grades qui se subdivisent centésimalement en minutes, secondes, tierces, etc.; mais cette division n'a sur la première que l'avantage de se prêter plus commodément aux transformations de notre système décimal, et l'usage a prévalu presque généralement jusqu'à ce jour en faveur de la première; c'est celle que nous avons adoptée dans ce qui précède et que nous conserverons pour la suite.

Ceci posé, *mesurer un angle*, c'est évaluer, au moyen d'un instrument quelconque, le nombre de degrés sexagésimaux et de fractions soit décimales, soit sexagésimales, de degré auquel correspond cet angle.

ÉQUERRE D'ARPENTEUR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

154. Le plus simple des instruments, parmi ceux qui servent à mesurer ou tracer des angles sur le terrain, est l'*équerre d'arpenteur*. Elle se compose ordinairement d'un cylindre en cuivre de $0^m,06$ à $0^m,08$ de diamètre, dans lequel sont pratiquées quatre fentes verticales ou *pinnules* déterminées par deux diamètres rectangulaires. Le plus souvent ce système de fentes est double, et deux diamètres consécutifs font ensemble un angle de 45°. Souvent enfin la surface cylindrique est enlevée et remplacée par le prisme octogonal régulier inscrit, dont chacune des faces porte une pinnule en son milieu ; le tout, monté à vis sur une douille en cuivre, se place sur un bâton ferré qu'on enfonce en terre dans une position sensiblement verticale. On voit alors facilement que, si l'on dirige l'un des diamètres suivant un alignement quelconque, les trois autres pinnules détermineront trois alignements, dont l'un sera perpendiculaire et les deux autres inclinés de 45° à droite et à gauche sur le premier. (Voir le dessin de l'équerre, Pl. II, fig. 1, 2 et 3.)

On remplace quelquefois, et toujours au moins pour les deux plans diamétraux principaux, la moitié de la hauteur de chaque fente par un fil tendu dans une fenêtre; au moyen de cette disposition, on vise avec beaucoup plus de précision, en appliquant l'œil près de la fente et en faisant en sorte que le fil de la fenêtre opposée couvre exactement le point visé.

155. La première vérification à laquelle on doive soumettre cet instrument consiste à s'assurer que les deux diamètres principaux se coupent bien à angle droit. Pour cela, après avoir planté l'instrument aussi verticalement que

possible, on vise à travers deux pinnules un objet éloigné, puis un second par les deux autres; on fait ensuite tourner l'instrument sur lui-même, jusqu'à ce qu'on aperçoive le premier objet à travers les secondes pinnules, et réciproquement. Si la coïncidence se fait exactement sur les deux diamètres, les quatre angles qu'ils forment entre eux sont égaux et, par conséquent, droits, et l'équerre est exactement construite. La même vérification peut se faire à l'égard des deux diamètres inclinés de 45° sur les premiers et, enfin, il est facile de s'assurer de la même manière que les angles droits des diamètres principaux sont bien également partagés par les diamètres secondaires.

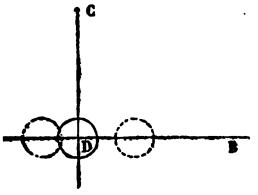
La plupart des équerres ne sont pas rectifiables, et cette condition ne pourrait guère être remplie sans enlever à cet instrument la simplicité qui fait un de ses principaux mérites. En raison de cette simplicité même, presque toutes les équerres sortant des mains des fabricants sont exactement divisées; toutefois, plusieurs problèmes intéressants pourraient à la rigueur être résolus avec une équerre fausse, aussi facilement qu'avec une bonne; mais, en général, cet instrument est d'un prix si peu élevé, qu'une équerre reconnue défectueuse devrait être immédiatement rejetée.

Passons maintenant en revue quelques-uns des problèmes les plus usuels, parmi ceux qui sont susceptibles d'être résolus avec l'équerre :

156. *Par un point donné* C, *mener une droite perpendiculaire à une droite donnée* AB.

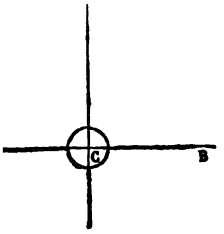
Si le point C est extérieur à la ligne AB, on promènera l'équerre sur cette ligne, en tenant l'un des diamètres principaux dans la direction AB, jusqu'à ce qu'on arrive au point

Fig. 94.



qui permettra de viser le point C dans la direction du diamètre perpendiculaire. Le pied D de l'équerre, dans cette position, sera le pied de la perpendiculaire cherchée, qu'il a alors de jalonner.

Fig. 95.



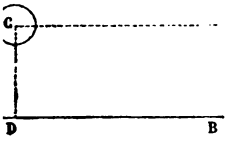
Si le point donné C est, au contraire, sur la ligne AB, il faudra simplement placer l'équerre en C, diriger l'un des diamètres sur cette ligne, et la perpendiculaire cherchée CD sera la direction du diamètre principal spondant au premier.

n'y aurait rien à changer à ces indications, s'il s'agise mener, par un point donné, une droite faisant avec utre droite donnée un angle de 45°.

7. *Par un point donné* C, *mener une parallèle à une* : *donnée* AB.

détermine, comme il vient d'être dit, le pied D de

Fig. 96.



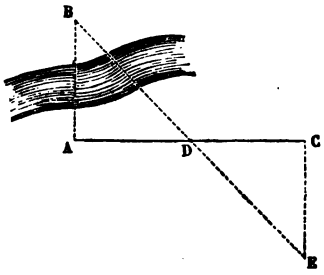
la perpendiculaire abaissée du point C sur AB; puis on place en C l'équerre dont on dirige l'un des diamètres suivant CD; le diamètre perpendiculaire au prelétermine la direction de la parallèle cherchée.

3. *Mesurer la distance d'un point donné* A *à un autre* B *inaccessible.*

ır cela, se plaçant en A avec l'équerre, on trace AC ndiculaire à AB et, sur cette perpendiculaire, on porte

à la suite l'une de l'autre deux longueurs égales quelconques AD et DC. Élevant ensuite en C une perpendiculaire indéfinie CE à AC, on jalonne cette perpendiculaire ainsi que la direction BD dont la rencontre en E avec la première détermine une longueur CE égale à la distance AB cherchée. Cette solution n'a pas besoin d'une démonstration, laquelle reposerait d'ailleurs sur l'égalité manifeste des deux triangles rectangles ABD et CDE.

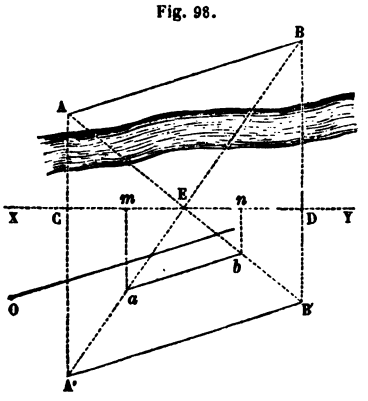
Fig. 97.



159. *Mesurer la distance de deux points inaccessibles* A, B *et, par un point donné* O, *mener une parallèle à la droite* AB.

On trace une base XY sur laquelle on cherche les pieds C et D des perpendiculaires abaissées de A et de B, et l'on fixe le milieu E de CD; on détermine ensuite, comme dans le problème précédent, les points de rencontre A′, B′ des directions AE, BE avec les deux perpendiculaires AC et BD. Il ressort de cette construction que DB′=AC et A′C=DB, en sorte que la figure AA′B′B est un parallélogramme dans lequel le côté A′B′ est égal et parallèle à la distance cherchée AB. Il reste donc

Fig. 98.



maintenant à mesurer directement A'B' et à lui mener une parallèle par le point O, ce que nous savons faire (157).

Comme on est le maître de choisir la base XY de manière que les opérations à faire en arrière puissent se développer sur un terrain accessible, on ne rencontrera le plus souvent aucune difficulté sérieuse; si cependant le terrain n'était pas assez vaste, on prendrait $Em = \frac{CE}{2}$ et $En = \frac{ED}{2} = \frac{CE}{2} = Em$; on mènerait les perpendiculaires *ma*, *nb* qui détermineraient *ab*, lequel serait parallèle à A'B' et par suite à AB; de plus, *ab* serait évidemment la moitié de AB.

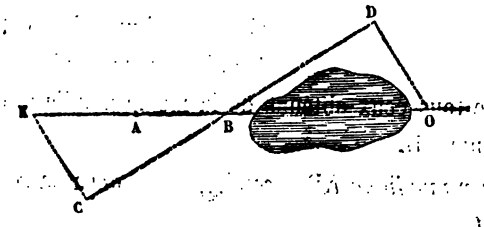
160. *Prolonger avec l'équerre une ligne* AB *au delà d'un obstacle.*

On mène B*b* perpendiculaire sur AB; *bc* perpendiculaire sur B*b*, *c*C perpendiculaire sur *bc*· enfin, on mesure une longueur *c*C égale à *b*B et l'on trace CD perpendiculaire sur C*c*; CD est alors évidemment le prolongement cherché de AB.

Fig. 99.

Deuxième solution. Par le point B l'on mène une ligne quelconque CD sur laquelle on prend BC = BD, de telle façon que la perpendiculaire à CD menée au point D dépasse l'obstacle; on élève ensuite une perpendiculaire à CD au point C et l'on mesure CK; prenant enfin

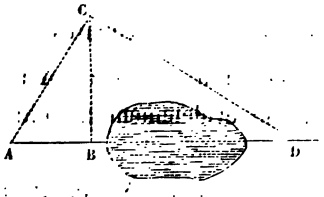
Fig. 100.



sur la première perpendiculaire une longueur DO égale à CK, on a le point O qui est évidemment un point du prolongement de AB. En choisissant une autre ligne CD ou en prenant une autre valeur de BC, on obtiendra autant d'autres points du prolongement qu'on en voudra.

Troisième solution. Au point B l'on élève sur AB une perpendiculaire BC sur laquelle on prend BC quelconque, toutefois que la perpendiculaire CD à AC dépasse l'obstacle. Les deux triangles rectangles semblables ABC, ADC

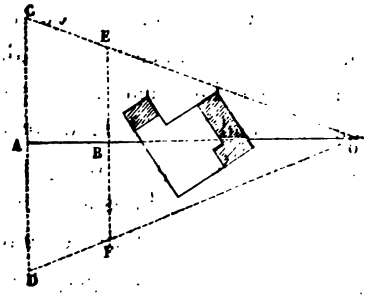
Fig. 101.



fournissent $CD : BC :: AC : AB$, d'où $CD = \frac{BC \times AC}{AB}$. Portant enfin sur CD cette valeur, on obtient la position du point D et, de la même manière, celle d'autant de points du prolongement qu'on en voudra.

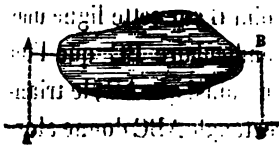
Quatrième solution. On peut encore élever CD et EF perpendiculaires en A et B à la ligne AB ; prenant ensuite AC et EB de façon que CE prolongé dépasse l'obstacle, on mesure AD = AC, BF = BE et la rencontre des lignes CE et DF fournit le point O qui appartient évidemment, ainsi que tous ceux obtenus de la même manière, à la droite indéfinie AB.

Fig. 102.



161. *Mesurer une ligne* AB *accessible à ses deux extrémités seulement.*

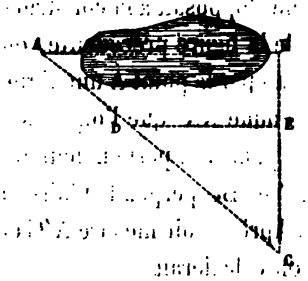
Fig. 103.



Première solution. On forme, au moyen de l'équerre, le rectangle ABB'A' et l'on mesure la longueur A'B' qui est égale à AB.

Deuxième solution. On trace BC perpendiculaire à AB et l'on mesure BC; par un point quelconque E de cette ligne, on trace DE parallèle à AB jusqu'à la rencontre de AC en D; on mesure CE, ainsi que DE, et la proportion

Fig. 104.



$$AB : BC :: DE : EC$$

donne

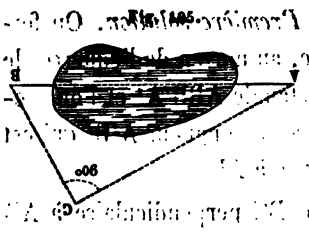
$$AB = \frac{BC \times DE}{EC}.$$

S'il était possible de prendre le point E au milieu de BC, la ligne AB serait précisément le double de DE, qu'il suffirait alors de mesurer.

Corollaire. On voit que cette solution n'exige pas qu'on approche du point A; elle sert donc dans le cas où l'une des extrémités de la droite est inaccessible.

Dans l'un et l'autre cas, du reste, elle peut être souvent simplifiée par l'emploi des pinnules à 45° de l'équerre; car si, l'un des diamètres de l'instrument étant dirigé sur BC, l'on cheminе sur cette ligne jusqu'à ce qu'on puisse viser le point A sous un angle en C de 45°, il est évident qu'alors BC = AB, et il suffit de mesurer la première de ces deux lignes.

Troisième solution. On mène une ligne quelconque AC

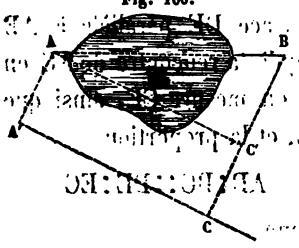


par le point A et l'on abaisse du point B sur cette ligne une perpendiculaire BC que l'on mesure ainsi que AC; le triangle rectangle ABC donne alors

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}.$$

Quatrième solution. Si l'obstacle s'opposait à la construction de la figure précédente, on tracerait par le point A une ligne quelconque AA′ que l'on mesurerait, puis A′C perpendiculaire à AA′ et BC perpendiculaire à A′C. Après avoir mesuré A′C et BC, on calculerait

Fig. 106.

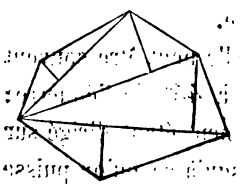


$$AB=\sqrt{AC'^2+BC'^2}=\sqrt{A'C^2+(BC-AA')^2}.$$

162. *Evaluer la surface d'une portion de plan comprise dans un polygone ou dans une courbe quelconque.*

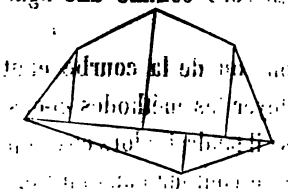
Si le périmètre est un polygone régulier, la géométrie élémentaire fournit des méthodes simples pour évaluer la surface; s'il s'agit d'un polygone irrégulier, on peut le partager en triangles ayant pour sommet commun un des sommets du polygone et pour côtés aboutissant à ce sommet les diagonales; puis, mesurer tous ces éléments linéaires et évaluer la surface de chaque triangle par la formule (138) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ou par la mesure d'une base et de la hauteur correspondante.

Fig. 107.



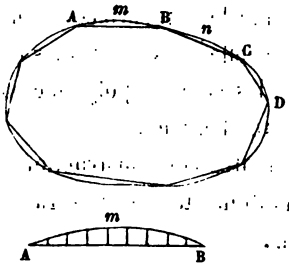
On peut encore mesurer la surface du polygone en traçant la plus grande diagonale, sur laquelle on abaisse des perpendiculaires de chacun des sommets ; le polygone se trouve ainsi décomposé en triangles et trapèzes rectangulaires, dont la mesure n'offre aucune difficulté.

Fig. 108.



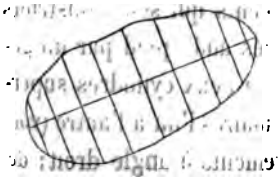
Si la surface est limitée par une ligne courbe, on inscrira dans cette courbe un polygone dont les côtés s'en écartent le moins possible et dont la surface s'évaluera comme il vient d'être dit. Quant aux petites surfaces mixtilignes A*m*B, B*n*C, etc., elles se mesurent en partageant la corde AB en parties égales assez petites, pour que l'on puisse regarder comme des lignes droites les portions de courbe comprises entre les perpendiculaires élevées sur la corde par ces points de division. On évalue alors chaque petit trapèze et chacun des deux triangles extrêmes, comme il a été dit ci-dessus, et la réunion de toutes ces surfaces partielles forme la surface cherchée.

Fig. 109.



On voit d'ailleurs que rien ne s'opposerait à ce que la mesure de la surface se fît avec une approximation suffisante par un procédé identique avec celui que nous avons indiqué pour les polygones, en traçant la plus grande corde et en partageant, par des per-

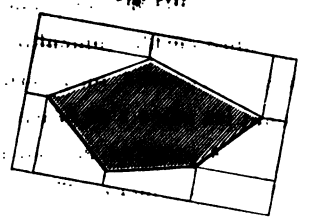
Fig. 110.



pendiculaires à cette ligne, la surface en trapèzes rectangulaires dont le côté curviligne serait assez petit pour pouvoir, sans erreur sensible, être mesuré comme une ligne droite.

Enfin, si l'intérieur du polygone ou de la courbe était inaccessible, on ne pourrait employer les méthodes ci-dessus; il faudrait alors envelopper le contour dans un polygone dont on sût calculer la surface, sans pénétrer à l'intérieur; on retrancherait ensuite de cette surface la somme de celles des intervalles compris entre le périmètre donné et les côtés du polygone auxiliaire, et la différence serait l'aire cherchée.

Fig. 111.



Il est inutile de répéter que toutes ces constructions de perpendiculaires s'opèrent sans difficulté sur le terrain, au moyen de l'équerre d'arpenteur.

PLANCHETTE ET ALIDADE. — USAGE ET VÉRIFICATION.

163. Nous ne séparerons pas ces deux instruments, qui ne peuvent guère servir que simultanément.

La *planchette* est une petite planche ou table en bois sur laquelle est collé le papier qui doit recevoir sur place le dessin du terrain; elle est supportée par un pied à trois branches, et ceux de ces instruments qui sont construits avec soin sont en même temps reliés audit pied par un genou dit *à la Cugnot* qui, composé de deux cylindres superposés dont les axes sont perpendiculaires l'un à l'autre (voir Pl. II, fig. 4), permet deux mouvements à angle droit; de

cette façon, la planchette peut être placée dans un plan horizontal, condition essentielle à l'exactitude des opérations et que l'on remplit sans peine (225 et 229), au moyen d'un niveau à bulle d'air.

Certaines planchettes peuvent se mouvoir aussi dans le sens horizontal, ce qui facilite la mise en place de l'instrument, après les déplacements qu'il subit nécessairement dans le cours de l'opération; mais cette complication est assez inutile, attendu qu'il est facile, avec un peu d'habitude, de mettre, à 3 ou 4 centimètres près, un point déjà projeté sur la planchette, au-dessus du piquet correspondant sur le terrain, et que l'erreur qui peut résulter, dans le dessin, de cette imperfection n'est pas plus grande que celles qu'engendrent nécessairement les épaisseurs mêmes des lignes.

Cet instrument n'est d'ailleurs soumis à aucune vérification; il sera d'autant plus parfait qu'il réunira la légèreté à la solidité. Il ne faut pourtant pas balancer à sacrifier la première condition à la seconde, car les désorientations produites par le peu de stabilité de la planchette jettent dans de grands embarras et occasionnent parfois une perte de temps considérable.

164. L'*alidade* est un instrument au moyen duquel on trouve sur un plan qui est d'ordinaire celui de la planchette décrite plus haut, la trace d'un autre plan perpendiculaire au premier; elle se compose d'une règle mobile, de cuivre ou de bois, ayant 3 ou 4 décimètres de longueur et portant, soit une tige placée en son milieu et, sur cette tige, une lunette (*alidade à lunette*) pouvant pivoter autour d'un axe parallèle au plan de la règle et perpendiculaire à sa longueur; soit, à ses deux extrémités, deux pinnules (*alidade*

à pinnules) perpendiculaires au plan de la règle et munies, comme dans l'équerre, l'une d'une fente verticale, l'autre d'un fil délié parallèle à cette fente. Nous donnons (Pl. II, fig. 5, 6 et 7) les dessins d'une alidade à pinnules et d'une alidade à lunette.

Le plan vertical passant par les fils des pinnules ou le plan décrit par l'axe optique de la lunette dans les diverses positions qu'elle peut prendre, *plan* dit *de collimation*, doit toujours passer exactement par le bord de la règle servant à tracer les alignements, et ce bord prend lui-même le nom de *ligne de foi*.

165. En chaque point où l'on veut relever et décrire l'angle sous lequel apparaissent deux objets éloignés, on établit la planchette et, sur celle-ci, une aiguille correspondant au sommet de l'angle en question; autour de cette aiguille on fait tourner le bord de la règle pour amener successivement le plan de collimation dans la direction des deux points de visée et, après s'être assuré de la parfaite exactitude de chacune des visées, on trace les deux alignements donnés par la ligne de foi.

Il n'est, du reste, pas absolument indispensable que la projection du sommet de l'angle soit rigoureusement au-dessus de ce point lui-même; quand elle s'en écarterait d'un décimètre, il faudrait que l'on opérât à une bien grande échelle pour que cette erreur fût appréciable sur le plan.

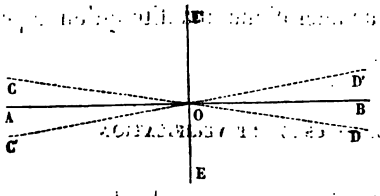
166. Pour opérer exactement avec l'alidade, il faut que la ligne tracée au crayon le long de la règle sur la planchette, soit bien la trace du plan vertical déterminé par l'axe optique de la lunette ou par les deux pinnules.

Dans cette dernière espèce d'alidade, la condition énoncée est presque toujours remplie, et d'ailleurs l'opérateur

n'a généralement pas le moyen de remédier par lui-même, séance tenante, à un dérangement de cette nature.

Quand on se sert d'une alidade à lunette, il faut, avant toutes choses, que l'axe de rotation de la lunette soit parallèle au plan de la règle et perpendiculaire à la ligne de foi. Si cette condition essentielle n'était pas remplie, il faudrait rejeter l'instrument; si au contraire elle est satisfaite, il importe, avant d'opérer, de s'assurer 1° si l'axe optique de la lunette est bien exactement perpendiculaire à son axe de rotation, pour pouvoir décrire, dans le mouvement qu'on lui imprime, un plan et non une surface conique; 2° si ledit plan, qui n'est autre que le plan vertical de collimation, comprend bien à la fois et l'axe optique et la ligne de foi. La première de ces deux vérifications est facile; elle consiste

Fig. 112.



à viser un même point éloigné D avec la lunette, d'abord dans sa position normale, puis après l'avoir fait tourner sur elle-même de 180°. On conçoit que, si l'on a soin de tracer d'abord au crayon sur le papier la ligne AB déterminée par la règle, l'angle aigu EOD sera reporté, s'il y a obliquité, en E'OD', et l'angle DOD' sera le double de la correction à opérer. Deux petites vis placées à droite et à gauche du réticule permettent, en desserrant l'une et serrant l'autre, de lui donner un mouvement de translation du côté qui convient pour détruire l'erreur.

On s'assure en même temps de la verticalité de l'un des fils en examinant si, la lunette élevée ou abaissée, l'objet visé est toujours masqué par le fil, ou bien en le dirigeant sur le côté d'un bâtiment. C'est encore au moyen

du réticule et en le tournant autour de l'axe optique, que l'on effectue cette seconde correction.

Il n'est pas moins intéressant, avons-nous dit, que la ligne de foi soit exactement située dans le plan vertical décrit par l'axe optique de la lunette; il faut, pour s'en assurer, avoir d'avance sur la planchette la projection d'une ligne du terrain; placer la ligne de foi sur la projection donnée; viser, dans cette position, le point situé à l'extrémité de la ligne projetée et voir si la projection fournie par cette visée coïncide avec la première, ou de combien elle en diffère.

On conçoit, du reste, que l'on puisse se passer de cette condition, quand on veut seulement avoir l'angle entre deux plans verticaux; car, quelle que soit la position de la ligne de foi par rapport au plan de collimation, cette ligne suivra toujours le mouvement angulaire dudit plan et l'orientation générale seule sera à modifier d'une quantité qu'on appelle l'*erreur de collimation*.

GRAPHOMÈTRE. — USAGE ET VÉRIFICATION.

167. L'instrument le plus commode et le plus usité pour la mesure directe des angles est le *graphomètre*. Il se compose d'un demi-cercle ou limbe gradué, de 10 à 30 centimètres de diamètre et sur lequel une règle peut se mouvoir autour d'un axe qui passe par le centre du cercle perpendiculairement à son plan. Aux extrémités du diamètre du limbe, comme à celles de la règle mobile, s'élèvent perpendiculairement deux pinnules formant alidade et destinées à fixer les lignes de visée.

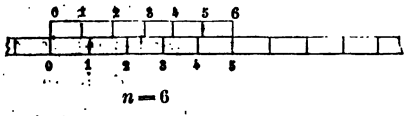
L'instrument roule sur un genou à coquille attaché à un pied à trois branches et qui permet au limbe de se mettre

très-aisément dans le plan de l'angle que l'on veut observer et mesurer; on place le graphomètre au sommet de cet angle, on ajuste les deux pinnules du diamètre fixe sur l'un des objets et l'on vise l'autre avec l'alidade mobile; l'angle compris se lit alors directement sur la graduation. Cette graduation, marquée sur le limbe dans les deux sens, comprend 180° et chaque degré se subdivise lui-même en demi-degrés, ainsi qu'on peut le voir par les dessins des fig. 1, 2, 3 et 4, Planche III.

168. Pour donner plus d'approximation à la lecture des angles fournis par le graphomètre, chacune des extrémités de l'alidade mobile est munie d'un *vernier*. On appelle ainsi un appareil qui sert à estimer les parties de degré plus petites que celles qui sont directement établies sur le limbe; il consiste en une petite graduation auxiliaire et concentrique à la première, mais mobile avec l'alidade et divisée en un nombre de parties plus grand d'une unité que celui des divisions renfermées dans le même espace sur le limbe.

De cette disposition, qui s'applique également aux graduations rectilignes, il résulte que, si nous désignons par D chacune des parties les plus petites du limbe, par d celles du vernier et par n le nombre de celles-ci qui correspondent à $n-1$ des premières, nous aurons évidemment

Fig. 113.



$$nd=(n-1)\mathrm{D},$$

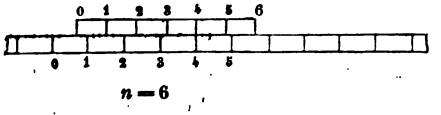
d'où $$d=\frac{n-1}{n}\mathrm{D}=\mathrm{D}-\frac{\mathrm{D}}{n} \text{ et } \mathrm{D}-d=\frac{\mathrm{D}}{n}.$$

Or, il est clair que la division 1 du vernier est en retard de

$D-d$ ou $\frac{D}{n}$ sur la division 1 du limbe; que la division 2 est en retard de $\frac{2D}{n}$ sur son homologue; la division 3, de $\frac{3D}{n}$, et ainsi de suite jusqu'à la division n qui et en retard de $\frac{nD}{n}$ ou D sur la division n du limbe. Si, par conséquent, nous faisons avancer le vernier d'un nombre entier de fois $\frac{D}{n}$ compris entre 0 et n, le nouveau mouvement aura nécessairement pour effet de faire arriver sur son homologue du limbe celle des divisions du vernier dont le rang est marqué par ce nombre lui-même; réciproquement, si l'on veut savoir de combien de fois $\frac{D}{n}$ le zéro du vernier aura dépassé celui du limbe, il suffira d'observer quel est le rang de celle des divisions dudit vernier qui coïncide avec son homologue.

Il ressort évidemment de cet exposé que, en quelque point de la graduation que soit arrêté le zéro du vernier, on devra ajouter au nombre entier de divisions franchies par ce zéro, une fraction égale à autant de fois $\frac{D}{n}$ qu'il y a d'unités dans le nombre qui exprime le rang de celle des divisions du vernier qui s'approche le plus de coïncider avec l'une des divisions du limbe; la mesure cherchée s'obtient ainsi avec une approximation marquée par la quantité $\frac{D}{n}$, laquelle prend des valeurs diverses, suivant celles qui sont données à D et à n.

Fig. 114.



Dans le graphomètre ordinaire, chaque division du limbe équivaut, comme il a été dit plus haut, à un demi-degré

ou 30′; le vernier comprend lui-même 30 divisions pour une amplitude de 29′; par conséquent, la quantité $\frac{D}{n}$ est égale à $\frac{30'}{30}$ ou à 1′, et la lecture se fait *en ajoutant au nombre de demi-degrés accusés par le limbe, autant de minutes qu'il y a d'unités dans le nombre qui exprime le rang de celle des divisions du vernier qui coïncide le plus sensiblement avec une division du limbe.*

On voit que cette disposition ne donne que les mouvements du vernier représentés par la quantité $D-d$ ou $\frac{D}{n}$ et que, dans le cas du graphomètre que nous venons d'examiner, les angles ne sont fournis qu'à moins d'une minute près; pour avoir une plus grande approximation, il faudrait rendre $D-d$ ou $\frac{D}{n}$ plus petit, c'est-à-dire prendre, en même temps ou séparément, pour D un nombre plus petit et pour n un nombre plus grand; mais, dans la question qui nous occupe, l'approximation obtenue avec $D=30'$ et $n=30$ est parfaitement suffisante.

169. Pour vérifier le graphomètre, il faut voir si le zéro de l'alidade mobile coïncide parfaitement avec l'origine des graduations du limbe, lorsque les fils des quatre pinnules sont dans le même plan vertical. Si cette condition n'a pas lieu, il faut ajouter à chaque angle ou en retrancher, suivant le cas, la distance angulaire constante des deux zéros, ou l'erreur de collimation.

Si l'alidade mobile pivotait autour d'un point qui ne fût pas le centre du limbe, cette imperfection serait la cause d'une erreur variable de lecture. Elle serait nulle dans la circonstance particulière où l'axe de l'alidade mobile passerait par le centre, et la plus grande possible quand cet

axe serait dans une direction perpendiculaire à la ligne passant par le centre et par le pivot; la distance de ces deux points serait sensiblement égale au maximum d'erreur. On pourrait au surplus, même avec un graphomètre présentant ce défaut, apprécier l'erreur que produirait la mesure d'un angle, au moyen d'une correction analogue à celle qui sera indiquée pour la boussole au n° 173; mais le plus simple et le plus sage, en pareil cas, serait de rejeter l'instrument qui serait d'un usage incommode et peu précis.

170. Si les objets que l'on vise et le point de station sont à peu de chose près dans le même plan horizontal, la hauteur des ouvertures pratiquées dans les pinnules permet de les voir, quoique le limbe soit placé horizontalement. Si la différence de niveau est trop considérable, il faut établir le limbe dans le plan des objets, ce qui a l'inconvénient de ne pas donner exactement l'angle réduit à l'horizon, ou se servir d'un graphomètre qui, au lieu de pinnules, soit muni de deux lunettes plongeantes que l'on fait mouvoir à l'aide de vis de rappel et que l'on arrête au moyen de vis de pression; ces instruments sont de beaucoup les plus exacts et les plus commodes; ils présentent en outre l'avantage de donner, dans la plupart des cas, l'angle véritable compris entre les plans verticaux passant par le point de station et les points de visée. Construit ainsi, le graphomètre doit porter un niveau qui assure l'horizontalité du plan du limbe.

Les graphomètres sont ordinairement munis d'une petite boussole qui sert à orienter le plan qu'on lève à l'aide de cet instrument; nous reviendrons sur cet objet, quand nous aurons décrit la boussole et que nous exposerons les diverses méthodes du lever des plans.

BOUSSOLE. — USAGE ET VÉRIFICATION.

171. L'aiguille aimantée donnant une direction considérée comme constante, dans une même partie de la terre et sous les mêmes influences que l'on suppose ne pas varier dans l'étendue et pendant la durée des observations, cette propriété a été utilisée pour la mesure des angles; la *boussole* n'est autre chose qu'une aiguille aimantée suspendue par son milieu sur un pivot et renfermée dans une boîte carrée. La pointe de l'aiguille se meut sur un cercle de $0^m,10$ à $0^m,20$ de diamètre, divisé en 360^s et en subdivisions de degré.

Sur l'un des côtés de cette boîte, parallèlement à la ligne de foi de la boussole, est appliquée une alidade à pinnules ou à lunettes qui peut basculer dans un plan vertical, quand la boussole est horizontale. On juge si la boussole approche de l'horizontalité en la faisant pivoter dans son plan sur le genou à coquille de son pied, et en voyant si, dans ce mouvement, les pointes de l'aiguille affleurent toujours le bord du limbe gradué; une plus grande exactitude n'est pas nécessaire en général; toutefois, quelques-uns de ces instruments portent une bulle d'air qui se meut dans un tube fermé, légèrement bombé et presque complétement rempli d'eau, de manière que ladite bulle vienne se placer au sommet de la partie courbe, entre deux repères fixés d'avance, quand l'instrument est placé sur une ligne horizontale. Ces diverses dispositions, qui seront expliquées ultérieurement avec plus de détail, ressortent suffisamment d'ailleurs de l'examen des fig. 1 et 2, Planche III.

Cela posé, si l'on tourne d'abord la boussole jusqu'à ce que l'aiguille aimantée corresponde au zéro de sa gradua-

tion, direction qu'on appelle sa *ligne de foi;* si l'on vise ensuite par la lunette ou les pinnules un objet éloigné, après avoir amené, par un mouvement de rotation autour du pivot vertical, le système dans cette direction, il est clair que l'observation du nombre de degrés compris sur l'arc gradué de la boussole entre la ligne de foi et la pointe de l'aiguille, donnera directement la valeur de l'angle formé par la ligne de visée avec la direction invariable de l'aiguille, direction qu'on appelle le *méridien magnétique.*

Si donc l'on répète cette observation pour un autre objet, on aura aussi l'angle de la seconde ligne de visée avec le méridien magnétique, et la différence de ces deux résultats sera l'angle des deux lignes de visée, ou mieux l'angle des deux plans verticaux qui passent par la station et par les deux points observés.

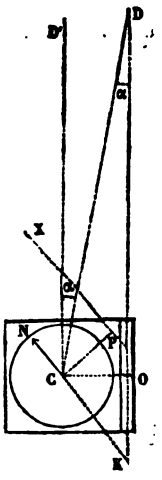
172. Il est bon de remarquer que le parallélisme de la ligne de foi et de l'alidade n'est pas une condition indispensable, pour qu'il soit possible de mesurer l'angle sous lequel sont vus deux points déterminés; on comprend en effet que, l'aiguille étant fixée dans la direction du méridien magnétique, le reste du système se meut indépendamment d'elle et tout d'une pièce, en décrivant l'arc qui mesure l'angle cherché, et que, quel que soit le nombre de degrés fournis par la lecture du limbe lors de la première visée, l'angle cherché sera toujours mesuré par le nombre de degrés qui auront passé, pendant le mouvement, sous l'aiguille, c'est-à-dire par la différence entre les résultats des deux lectures.

La boussole donne cependant toujours, quand on veut seulement obtenir l'angle que fait avec le méridien magnétique le rayon dirigé sur un objet éloigné, une erreur qui tient à ce que l'alidade ou la lunette n'est pas placée au

centre de l'instrument, c'est-à-dire au sommet de l'angle lui-même.

Soient en effet C le centre de la station; CN le méridien magnétique, c'est-à-dire la direction fixe de l'aiguille aimantée; CO l'axe de mouvement de l'alidade et D l'objet à viser. L'angle fourni directement par la boussole est l'angle des deux droites PX et OD, lequel est égal à NKD, ou encore à NCD′, tandis que l'angle véritable est NCD qui en diffère de DCD′ ou α.

Fig. 115.



Pour apprécier la portée de cette erreur, il convient d'observer que, dans le triangle rectangle COD, nous avons

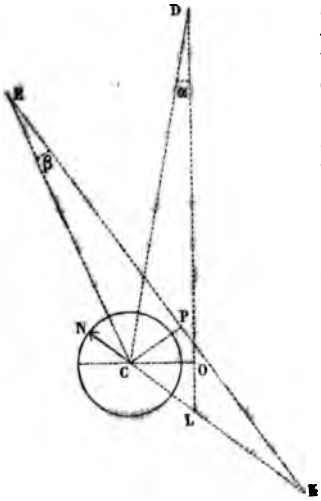
$$\sin \alpha = \frac{CO}{CD}.$$

L'angle α est toujours très-petit, puisque son sinus a pour expression une fraction dont le numérateur est la distance de l'axe de la lunette au centre de la boussole, et le dénominateur la distance, toujours relativement très-grande, du même centre à l'objet visé. Cette erreur angulaire est donc d'autant moindre que l'on vise un objet plus éloigné, et, en supposant que la distance CO soit de $0^m,10$, l'erreur α, pour un objet situé à 60^m, est moindre que $6'$, quantité bien inférieure à celles que l'on commet dans la lecture; en conséquence, il n'y a pas lieu de tenir compte de cette différence dans la pratique, eu égard au degré de précision que comporte l'emploi de la boussole.

Il est évident d'ailleurs qu'en raison de ce que nous avons

dit dans le numéro précédent, cette cause d'erreur disparaît complétement dans la mesure de l'angle de deux objets, par suite de la soustraction qui s'opère sur les angles au méridien, pourvu toutefois que les deux objets visés soient sensiblement à la même distance; en effet, si les deux points de mire sont D et E, les angles véritables au centre de la station sont NCD et NCE, et ceux que donne la boussole sont respectivement NLD et NKE. Or, l'angle cherché est NCD—NCE ou ECD, et l'angle fourni par l'observation est NLD—NKE; mais nous venons de voir que

Fig. 116.



$$NCD = NLD + \alpha$$

et $$NCE = NKE + \beta;$$

donc

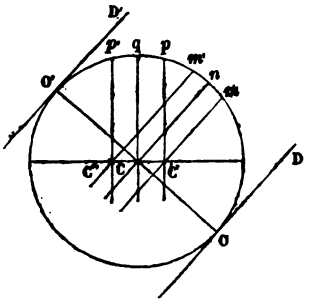
$$NCD - NCE = NLD - NKE + \alpha - \beta;$$

d'où il suit que l'angle cherché sera égal à l'angle déduit de l'observation, si $\alpha = \beta$; ce qui aura lieu, comme le montrent les triangles rectangles COD et CPE, si les deux points D et E sont à des distances qui permettent de considérer OD comme égal à PE; mais, nous le répétons, il n'y a pas lieu, dans la pratique, de s'arrêter à ces détails, qui ne sauraient avoir sur les résultats une influence qu'on ait intérêt à mesurer.

173. La seule vérification à laquelle il importe de soumettre la boussole avant d'en faire usage, a pour but de

s'assurer que l'instrument est bien centré, c'est-à-dire que le pivot sur lequel repose l'aiguille est bien au centre du limbe gradué. Si cette condition n'est pas remplie, soit C′ la

Fig. 117.



place qu'occupe le pivot; de toutes les positions que peut prendre la boussole relativement à l'aiguille, une seule, celle dans laquelle l'aiguille sera dirigée suivant la ligne CC′, donnera une lecture conforme à la vérité; pour toute autre position C′*m* de l'aiguille, l'indication fournie différera de la véritable du petit arc *mn*, et cette différence atteindra son maximum, quand la boussole sera placée de manière que l'aiguille soit perpendiculaire à la ligne CC′, auquel cas l'arc *pq* mesurera cette erreur.

Cependant on pourrait à la rigueur se servir d'un instrument décentré, en retournant la boussole de 180°, ramenant l'oculaire de la lunette vers l'œil, puis visant le point donné par O′D′ comme on l'avait fait par OD; vu la nouvelle position C″ du pivot, l'aiguille, primitivement arrêtée en *m*, s'arrêterait en *m*′ et l'on obtiendrait ainsi l'arc *mnm*′ représentant approximativement le double de l'erreur et de la correction à faire; mais il serait impossible, dans la pratique, de prendre ainsi deux fois chaque angle, et, si la différence n'est pas considérable, il faut la négliger, sinon faire rectifier la position du pivot.

On voit, d'après cela, que le moyen de s'assurer si la boussole est exactement centrée, consiste à opérer cette double visée dans deux directions rectangulaires et à voir

si, dans chacune de ces observations, l'arc qui représenterait le double de la correction est nul, c'est-à-dire si les deux points analogues à p et p' tombent sensiblement l'un sur l'autre.

Ajoutons enfin, pour terminer ce que nous avons à dire sur l'usage de la boussole, que, pour ne pas s'exposer à commettre des erreurs graves, il importe 1° d'avoir, dans les visées, la lunette toujours du même côté, soit à droite, soit à gauche; 2° de compter toujours les angles dans le même sens; 3° de ne porter sur soi ni clefs, ni outils en fer dont l'action magnétique serait susceptible de modifier la position normale de l'aiguille.

MÉTHODES DIVERSES DU LEVER DES PLANS.

LEVER A L'ÉQUERRE.

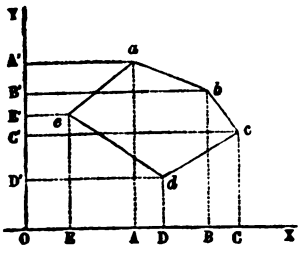
174. Maintenant que nous avons décrit, d'une part, les deux instruments usuels propres à mesurer des distances sur le terrain, savoir : la chaîne d'arpenteur et la stadia; d'autre part, les quatre instruments au moyen desquels on peut relever des angles, l'équerre d'arpenteur qui ne donne que des angles droits et demi-droits, la planchette et l'alidade qui, à proprement parler, ne forment qu'un seul instrument, le graphomètre et la boussole; nous allons montrer comment ces quatre derniers correspondent, concurremment avec ceux dont on se sert pour mesurer les distances, à quatre méthodes principales pour lever un plan, savoir : le *lever à l'équerre*, le *lever à la planchette*, le *lever au graphomètre* et le *lever à la boussole*.

Il existe sans doute beaucoup d'autres instruments qui pourraient être employés au lever des plans; mais la con-

naissance de ceux dont nous venons de parler et qui sont les seuls qu'on emploie habituellement, peut suffire dans presque tous les cas qui se présentent dans la pratique.

Le lever de plan à l'équerre est une opération des plus simples; elle consiste à déterminer, au moyen de l'équerre d'arpenteur, les coordonnées des points à lever, c'est-à-dire les distances de chacun d'eux à deux axes rectangulaires.

Fig. 118.



On prend, dans ce but, une base OX sur laquelle on s'avance, en mettant l'une des alidades de l'équerre dans sa direction, jusqu'à ce qu'on arrive en E, où l'on aperçoit le point *e* à travers l'alidade perpendiculaire; on mesure ensuite avec la chaîne la distance OE, et, en opérant de la même manière pour les autres points, on porte sur le papier les distances OE, OA, OD, etc. On prend un second axe OY, perpendiculaire au premier et sur lequel on effectue des opérations analogues aux précédentes; les intersections des perpendiculaires à cet axe D'*d*, C'*c*, E'*e*, etc., avec celles que l'on a élevées en E, A, D, etc., déterminent les projections de tous les sommets du polygone *abcde*, ou plus généralement la projection de tout autre point qu'on voudra lever.

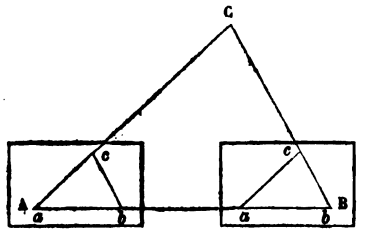
Dans la pratique, le développement de deux axes serait souvent impossible, et l'on opère plus simplement en supprimant complétement le second axe OY; on mesure alors, comme précédemment, la distance du point fixe O aux diverses positions du pied de l'équerre; puis, on mesure ensuite directement les distances E*e*, A*a*, D*d*, etc., de ce pied aux divers points à déterminer.

175. Comme on le voit, la base de cette méthode est l'axe ou la *ligne d'opération*, dont le tracé exact est de la plus grande importance; il arrive presque toujours que cette ligne ne peut être choisie de manière à servir pour le le lever de toute l'étendue du terrain qu'on a en vue de reproduire; il faut alors, comme sur des routes sinueuses ou dans des rues étroites et non alignées, tracer une série de lignes d'opération dont les positions relatives doivent être reportées avec grand soin sur le papier. Ce report ne peut le plus souvent s'effectuer qu'en mesurant exactement l'angle que forment entre elles deux de ces lignes à leur point de rencontre, et ici l'emploi du graphomètre ou de la boussole est indispensable; il est donc vrai de dire que, toutes les fois qu'on a un plan d'une certaine étendue à lever, l'équerre et la chaîne ne suffisent généralement pas pour cette opération.

LEVER A LA PLANCHETTE.

176. Pour lever à la planchette le plan d'un triangle ABC, on établira d'abord l'instrument horizontalement au-dessus du point A dont on déterminera, aussi exactement que possible, la projection *a* sur le papier, en ayant soin de disposer celui-ci de manière que le dessin complet puisse s'y développer de la manière la plus convenable. Puis, par la projection *a* et au moyen de l'alidade, on fera passer deux droites dirigées vers les points B et C. On mesurera la distance AB; on reportera

Fig. 119.

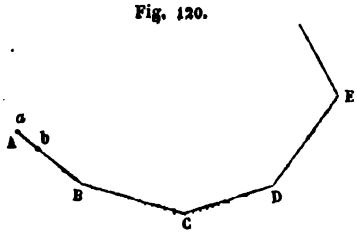


sur la ligne de visée allant de *a* vers B, une longueur *ab* proportionnelle, dans un rapport donné, à la distance AB ; on déterminera de la même manière le point *c*, et le triangle *abc* sera semblable au triangle ABC, puisque ces deux figures auront un angle égal compris entre côtés proportionnels. Le rapport de similitude des éléments linéaires de ces deux figures ne sera d'ailleurs autre chose que ce qu'on nomme l'*échelle* du plan, ainsi que nous le verrons bientôt.

On comprend sur-le-champ que le même résultat serait obtenu en transportant, après la détermination du point *b*, la planchette en B, la disposant horizontalement et de manière que, le point *b* correspondant à la verticale du point B, la ligne *ba* soit dans la direction BA. Enfin, l'on dirigerait l'alidade suivant BC, et la ligne *bc* déterminerait le point *c* par son intersection avec *ac*.

177. Si, au lieu d'un simple triangle, on avait à lever un contour polygonal ABCDE, deux moyens se présenteraient également pour arriver au résultat cherché. On pourrait placer la planchette en A, viser B et tracer la direction AB sur laquelle on prendrait une longueur A*b* proportionnelle à la longueur AB préalablement mesurée ; on porterait ensuite la planchette en B où, après avoir placé *b* au-dessus de B et dirigé *ba* sur BA, on tracerait l'angle ABC en visant C ; on prendrait sur *b*C une longueur *bc* proportionnelle à BC préalablement mesuré ; on se transporterait en C où l'on opérerait de même, et ainsi de suite à tous les sommets ou points à relever. Cette méthode, qui consiste à

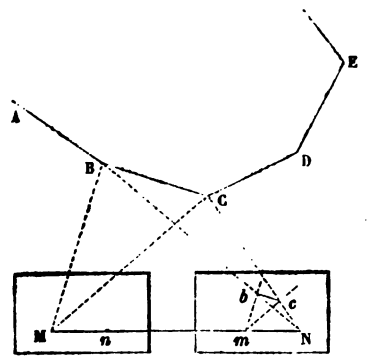
Fig. 120.



cheminer tout le long du contour à lever, s'appelle par cette raison la *méthode de cheminement*.

178. La seconde méthode, dite *méthode des intersections*, consiste à considérer l'un des côtés du polygone, ou plus généralement une ligne quelconque MN, déterminée préalablement sur le terrain et sur le dessin en grandeur et en position, comme la base d'une série de triangles ayant pour sommets opposés chacun des points à lever. Ces points se déterminent ensuite par le second des moyens indiqués ci-dessus pour le triangle, c'est-à-dire par *l'intersection* de deux visées dirigées successivement de chacune des extrémités de la base sur le sommet.

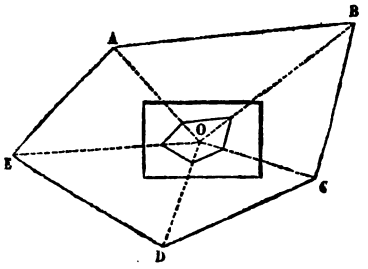
Fig. 121.



Il est évident que chacune des deux méthodes comporte une série de vérifications qui s'opèrent par la mesure directe, soit des longueurs, soit des angles qui n'ont pas servi à la détermination des divers points levés.

179. Il y a un troisième procédé pour lever rapidement, à la planchette, un contour polygonal renfermant un espace qui peut être parcouru dans toutes les directions menées d'un point intérieur *o* aux divers sommets à déterminer. Il consiste à établir la planchette à ce point intérieur, à tracer sur le papier les directions allant de ce point aux divers sommets, à mesurer les longueurs OA, OB, OC, etc., comprises sur ces directions entre le point de station et

Fig. 122.



les points observés, et à rapporter proportionnellement ces longueurs sur les lignes correspondantes préalablement tracées. Ce procédé pourrait s'appeler *méthode de rayonnement*.

180. Ainsi qu'on a dû le remarquer, la planchette veut tre replacée, à chaque fois qu'elle change de station au ours d'une même opération, dans une position exactement arallèle à celle qu'elle occupait. Avec de l'habitude, on rrive assez promptement à remplir cette condition; mais n abrége toujours beaucoup les tâtonnements, en se serant d'un instrument appelé *déclinatoire* et que représen-nt les fig. 5 et 6, Planc. II. C'est une petite boussole enfermée dans une boîte de forme rectangulaire, dont un es côtés sert de règle et dont l'aiguille ne peut parcourir u'environ 40°. Lorsque, à la première station, on a déterminé la position de la planchette, on pose le déclinatoire ur cette planchette, en faisant tourner la boîte jusqu'à ce ue l'aiguille se place suivant une ligne parallèle au bord; ette ligne, qui correspond au zéro de l'arc gradué, est la gne de foi du déclinatoire. Dans cette position, on trace ne droite sur le plan, le long du bord de la boîte; puis, uand la planchette a été transportée ailleurs, on pose le ord du déclinatoire le long de cette droite et l'on tourne a planchette jusqu'à ce que l'aiguille aimantée revienne au éro. Ainsi placée et rendue horizontale comme à la première station, la planchette est parallèle à la position pri-

mitive; on dit alors qu'elle est *orientée*, et l'on peut sans crainte continuer l'opération.

LEVER AU GRAPHOMÈTRE.

181. Par cela même que le graphomètre peut servir à mesurer l'angle que forment entre elles deux directions concourantes, cet instrument est un de ceux qui sont employés au lever des plans, concurremment avec la chaîne d'arpenteur qui permet de mesurer les longueurs. La précision de sa construction et les résultats qu'il fournit le rendent même supérieur, sous ce rapport, à la plupart des autres. Soit donc qu'il s'agisse d'un réseau de triangulation, ou simplement d'un système de points formant un contour polygonal quelconque, il est facile de mesurer avec le graphomètre l'angle des deux lignes qui joignent un sommet avec les deux voisins; puis, de déterminer la position de ces derniers sur le plan par des mesures directes de longueurs, comme il a été expliqué pour le lever à la planchette; on reconnaît ici la méthode de cheminement.

L'application de la méthode des intersections n'est pas moins facile, et il suffit de prendre sur le terrain et de rapporter sur le papier une base fixe de longueur bien exactement déterminée; on mesure alors les angles sous lesquels on voit de chaque extrémité de la base l'autre extrémité et le point qu'il s'agit de lever; l'intersection des deux lignes ainsi tracées fournit sans incertitude ce point lui-même. On comprend néanmoins que, quand les angles d'intersection des rayons visuels sont très-aigus ou très-obtus, cette dernière méthode puisse devenir défectueuse; il faut alors, ou changer la base adoptée de manière à

corriger autant que possible ce défaut, ou n'employer ce mode que pour la fixation de points peu importants.

Il est bien entendu que la base fixe ou ligne d'opération pourrait sans inconvénient être l'une des lignes du plan lui-même, s'il s'en présentait une dans de bonnes conditions pour cet objet.

LEVER A LA BOUSSOLE.

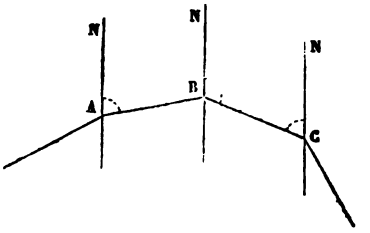
182. La boussole peut, jusqu'à un certain point, remplacer le graphomètre ; mais elle donne, dans la mesure des angles, des indications beaucoup moins précises que ce dernier instrument; elle n'est guère d'un bon usage que pour le lever des détails, à l'égard desquels la précision de position est beaucoup moins indispensable que la rapidité des opérations. Toutefois, elle peut être employée dans les mêmes circonstances que le graphomètre, soit par cheminement, soit par intersections, soit encore dans le lever à l'équerre, quand les circonstances locales exigent l'emploi de plusieurs lignes d'opération.

183. Lorsqu'on aura levé un polygone entier, on pourra, avant de le rapporter sur le papier, voir s'il se ferme exactement au moyen d'un calcul très-simple. On se rappellera pour cela que la somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux. On fera donc la somme de ces angles en les déduisant, comme on l'a vu, de ceux que font les côtés avec le méridien, et, si la somme satisfait à la condition qui vient d'être exprimée, on sera assuré d'avoir opéré exactement. Cette vérification est nécessaire, soit qu'on ait levé au graphomètre, soit qu'on ait employé la boussole;

mais on comprend qu'elle doive être plus indispensable encore dans ce dernier cas, où le peu de précision de l'instrument laisse nécessairement quelque doute sur l'exactitude de chaque opération partielle.

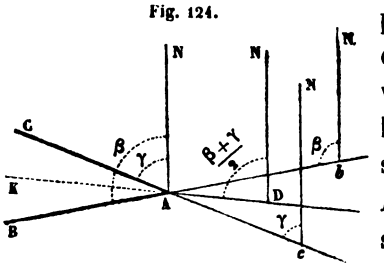
184. Il n'est pas inutile d'ajouter que, quand il s'agit de lever un contour polygonal à la boussole, le parallélisme des méridiens magnétiques des divers sommets dans l'étendue du lever, permet de passer successivement un sommet sur deux sans y faire station. La figure ci-contre montre en effet que, quand on a mesuré en A l'angle NAB que fait le côté AB avec le méridien, on peut de suite se transporter en C, et, visant en arrière sur le point B, prendre l'angle NCB qui n'est autre chose que le supplément de l'angle NBC. On voit ainsi qu'il faut, dans ce cas, prendre deux angles à chaque station où l'on s'arrête, l'un d'avant, l'autre d'arrière, et, pour faciliter cette opération, la boussole est ordinairement graduée dans les deux sens; un peu d'habitude fait d'ailleurs bientôt disparaître toute hésitation dans cette manœuvre.

Fig. 123.



185. Proposons-nous, comme exemple du parti que l'on peut tirer de l'emploi de la boussole, de trouver le prolongement de la bissectrice d'un angle saillant dont le sommet A et les côtés AB, AC sont inaccessibles. On

Fig. 124.



se placera, en deux points b et c, sur les prolongements des côtés et l'on observera, avec la boussole, les angles β et γ qu'ils font avec le méridien magnétique. L'angle saillant BAC est évidemment égal à $\beta - \gamma$, comme l'indique la figure, et l'angle que fait la bissectrice AK avec le méridien est égal à

$$\gamma + \frac{BAC}{2},$$

ou

$$\gamma + \frac{\beta - \gamma}{2},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Il suffira donc alors, pour déterminer un point de la bissectrice cherchée, de trouver, par tâtonnement et au moyen de la boussole, un point D pour lequel AD fasse cet angle $\frac{\beta+\gamma}{2}$ avec le méridien.

RAPPORT ET DESSIN DES PLANS.

186. Quand les opérations sur le terrain sont terminées, c'est-à-dire quand on a recueilli, par les méthodes précédemment indiquées, tous les éléments angulaires et linéaires qui rattachent entre eux les points à lever, il reste encore à *rapporter* sur le papier les résultats de ces opérations.

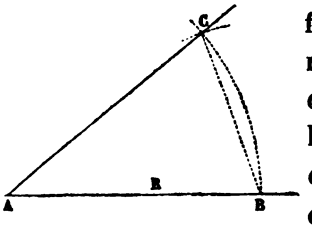
Les angles sont exprimés en degrés et fractions de degré, et, quand l'un des côtés d'un angle a été tracé sur le dessin, on emploie, pour tracer l'autre, un instrument nommé *rapporteur*. C'est un demi-cercle en corne assez épaisse pour ne pas se voiler trop facilement par la chaleur, sans cependant cesser d'être transparente; le diamètre de ce

cercle est indifférent sous le rapport de l'ouverture des angles; il varie d'ordinaire entre $0^m,15$ et $0^m,20$. La circonférence du rapporteur est divisée en degrés et, quand cela est possible, en demi-degrés; la graduation est double, elle va de 0^o à 180^o dans un sens et de 180^o à 0^o dans l'autre. Pour se servir de cet instrument, on applique le diamètre du cercle sur le côté connu, en faisant coïncider le centre du rapporteur avec le sommet de l'angle, et la graduation partant de 0^o indique un second point du second côté. L'usage du rapporteur est trop simple du reste pour qu'il convienne de s'y arrêter davantage; nous dirons seulement que quelques-uns de ces instruments sont en cuivre évidé, ce qui n'a aucun inconvénient, puisque les divisions sont poussées jusqu'au bord de la circonférence et que le centre est situé sur le bord intérieur ou extérieur de la règle qui forme la base. Les fig. 5 et 6 de la planc. III présentent d'ailleurs le dessin de ces deux dispositions.

187. Le rapporteur donne avec une exactitude suffisante les angles relevés à la boussole. Si cependant ces angles avaient été déterminés à l'aide d'un instrument plus parfait, il serait préférable de les rapporter aussi par un moyen plus précis.

Supposons que, par une méthode quelconque, on soit parvenu à connaître la valeur de la corde BC correspondant à l'angle A dans une circonférence d'un rayon R déterminé; il est certain que si, d'une part, du point A avec le rayon R, on décrit l'arc de cercle BC; si, d'autre part, on trace un autre arc du point

Fig. 125.



B comme centre avec un rayon égal à la corde connue, ces deux arcs se couperont en un point C qui, joint au sommet A, donnera l'angle BAC cherché.

Toute la difficulté gît donc dans la connaissance des cordes correspondant à chaque angle pour une circonférence d'ailleurs quelconque, puisque l'ouverture d'un angle ne dépend nullement du rayon de la circonférence dans laquelle on le mesure. Il a été dressé des Tables qui atteignent complétement ce but; ces Tables peuvent du reste être facilement suppléées par celles des sinus, puisque la formule (93, Rem.)

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\text{corde}\,2\alpha,$$

ou

$$\text{corde}\,2\alpha = 2\sin\alpha,$$

donne le moyen de calculer la longueur de la corde qui sous-tend un angle quelconque, quand on connaît le sinus de l'angle qui représente la moitié du premier.

Ce mode de construction des angles ne laisse rien à désirer; ajoutons toutefois que, dans la pratique, il est plus exact de construire, au moyen de la corde de leur supplément, les angles trop obtus qui laisseraient, par l'obliquité des intersections des deux arcs en C, de l'incertitude sur le point précis qui doit servir à tracer le côté AC; il est bon de ne pas négliger cette précaution, dès qu'il s'agit d'un angle qui atteint 120°.

188. Nous avons déjà dit (176) que le rapport de similitude entre les figures déterminées par les lignes tracées ou fictives du terrain et les figures qui doivent en être la représentation sur le papier, s'appelait l'*échelle* du plan. Ce rapport, qui n'influe aucunement sur la valeur et l'ouverture

des angles, est l'élément indispensable, le point de départ de tout dessin de cette nature ; il est nécessairement constant pour un même plan et doit toujours y être explicitement indiqué, pour en compléter la lucidité.

A défaut de cette indication sur un plan rapporté, on serait obligé de déterminer l'échelle après coup, par la mesure directe, au moyen de la même unité de longueur, d'un côté a du dessin et de son homologue A du terrain; la division de ces deux résultats l'un par l'autre fournirait le rapport de similitude $\frac{a}{A}$, c'est-à-dire l'échelle.

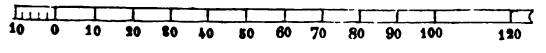
Que ce rapport soit ainsi obtenu par la comparaison de deux éléments linéaires du plan, ou qu'il ait été fixé préalablement, il est avantageux de simplifier autant que possible son expression, pour faciliter les opérations mentales que l'on est obligé de faire à chaque instant, quand on examine un plan; aussi réduit-on généralement la fraction qui représente l'échelle, à avoir l'unité pour numérateur et lui donne-t-on la forme $\frac{1}{\frac{A}{a}}$, quelle que soit la valeur numérique du dénominateur $\frac{A}{a}$. Si, par exemple, la fraction ainsi réduite est $\frac{1}{47}$, on en conclura qu'un côté du plan est la quarante-septième partie de son homologue sur le terrain, et l'on dira que le plan est rapporté au quarante-septième, ou encore à l'échelle de 1 pour 47, ou enfin à l'échelle de $\frac{1}{47}$ de mètre pour 1 mètre.

Il est bien entendu que l'échelle exprimée par la fraction $\frac{1}{47}$ ne s'applique qu'aux éléments linéaires des plans, et que

c'est le carré de cette fraction qui exprime le rapport des surfaces.

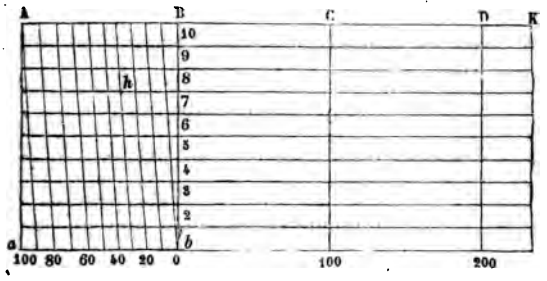
189. Les échelles doivent être d'ailleurs représentées graphiquement sur les plans, en même temps qu'elles sont définies en chiffres. Ces échelles graphiques, dont nous donnons ci-contre un spécimen au deux-millième, se composent le plus souvent d'une double ligne droite divisée, dans le rapport adopté pour le plan, en parties proportionnelles au mètre et en multiples ou sous-multiples décimaux du mètre; elles servent à rapprocher à chaque instant les dimensions réduites des dimensions naturelles du terrain et à déduire au besoin les unes des autres.

Fig. 126.



190. Toutefois il serait, dans bien des cas, fort inexact de prendre les indications des longueurs sur une échelle de cette nature, qui n'en contient du reste qu'un très-petit nombre ; on adopte alors une autre disposition, un peu plus compliquée il est vrai, mais qui fournit directement l'évaluation numérique d'une longueur quelconque du plan, et réciproquement la longueur d'une ligne d'après son expression numérique.

Fig. 127.



Soit, pour tracer cette nouvelle échelle, $\frac{1}{e}$ la fraction qui la représente numériquement; nous concluons immédiatement de ce rapport que

1 mètre sur le papier équivaut à e mètres sur le terrain,

que $\frac{10}{e}$ mètres équivalent à 10 mètres,

$\frac{100}{e}$ mètres à 100 mètres;

telles seront donc d'abord les dimensions des dizaines et centaines de mètres.

Traçons maintenant onze lignes parallèles, horizontales et équidistantes; portons 10 fois la quantité $\frac{10}{e}$ de A en B et de a en b; portons de même $\frac{100}{e}$ ou AB autant de fois vers K que nous voulons que l'échelle contienne de centaines de mètres. Élevons par les points A, B, C, D... des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de ab; unissons enfin par des lignes transversales les dizaines de la ligne supérieure à celles de la ligne inférieure, savoir : les 1^{re}, 2^{e}, 3^{e},... 9^{e} du haut, respectivement avec les 2^{e}, 3^{e}, 4^{e},... 10^{e} du bas. Il est facile de voir que les transversales extrêmes déterminent deux suites de triangles rectangles semblables dont les côtés horizontaux représentent 1, 2, 3,... 10 mètres. L'échelle dessinée ci-dessus est celle de $0^{m},0002$ pour un mètre ou de 1 à 5000; nous y avons donc pris $e=5000$.

Cela posé, si, par exemple, on veut connaître l'expression numérique d'une longueur représentée sur un plan dressé à cette échelle, on prendra une ouverture de compas égale à cette longueur; on placera l'une des pointes sur la verticale convenable pour que l'autre tombe entre le zéro et le point a; on fera glisser la première sur ladite verti-

cale, jusqu'à ce que la seconde tombe dans la même ligne, sur une division exacte, en *h* par exemple, et l'on conclura de suite que la longueur cherchée équivaut au nombre de centaines de mètres marqué par la première pointe du compas, plus 3 dizaines de mètres, plus enfin 7 mètres.

Les échelles de ce genre sont généralement tracées sur une plaque de cuivre, quelquefois sur l'ivoire, et leur emploi, qui du reste ne présente aucune difficulté, est indispensable pour le rapport des plans qui demandent de la précision. Nous en donnons (Planc. III, fig. 7) un dessin complet.

INDICATION DES ÉCHELLES ADOPTÉES DANS LE SERVICE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

191. Il est en général d'un grand avantage que les échelles des plans soient exprimées par des rapports simples; cette condition est de rigueur dans le service des ponts et chaussées, où les instructions administratives prescrivent d'adopter exclusivement, pour les plans proprement dits, des échelles exprimées par une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur, suivant les cas, les nombres 1000, 2000, 2500, 5000 ou 10000.

Toutefois, une exception à cette règle a été depuis longtemps admise pour les plans des portions de villes, bourgs ou villages qui servent de *traverses* aux routes; ces plans, qui sont destinés à conserver les limites du terrain affecté à la circulation et la trace des alignements adoptés pour les constructions riveraines, ont besoin d'une clarté toute spéciale, qui mette leur interprétation à la portée de la plus grande partie des intéressés; aussi sont-ils dressés à une

échelle beaucoup plus grande; c'est invariablement celle de $0^m,005$ pour 1 mètre ou de $\frac{1}{200}$.

Cette échelle et même celle de $\frac{1}{100}$ s'appliquent encore aux autres dessins qui, comme ceux des ouvrages d'art, exigent la reproduction d'un grand nombre de détails, en même temps qu'une grande netteté, ou à ceux qui, dans les nivellements que nous étudierons bientôt, doivent reproduire, suivant certaines règles, le relief actuel ou projeté du terrain.

Enfin, pour les détails eux-mêmes des portions d'ouvrages qui demandent ce surcroît de clarté, les ingénieurs peuvent augmenter encore leurs échelles et adopter celles de $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{5}$ même, en n'employant toutefois que des rapports simples et décimaux.

COPIE ET RÉDUCTION DES PLANS.

192. Si l'on veut reproduire un dessin à la même échelle, le *copier* en un mot, plusieurs procédés plus ou moins avantageux peuvent être employés :

1° On partage la surface à copier en carrés ou rectangles par deux systèmes de lignes parallèles tracées légèrement au crayon; on trace sur une feuille de papier un même nombre de carrés égaux à ceux de l'original et l'on y dessine, de proche en proche, tous les détails compris dans les rectangles correspondants de l'original; cette opération se fait soit à vue, soit en rapportant chaque point par des coordonnées, soit enfin en décrivant deux arcs de cercle dont ce point est l'intersection.

Les lignes droites, les côtés de polygones ou de bâti-

ments s'obtiennent en plaçant, comme il vient d'être dit, deux de leurs points, ou les imaginant prolongés jusqu'à la rencontre des côtés des rectangles et en reportant les points d'intersection au moyen du compas.

Dans les parties du dessin qui sont plus chargées de détails, on peut multiplier les carreaux ou les diviser par des diagonales.

Si le dessin à copier est trop précieux pour qu'il soit permis d'y tracer aucune ligne, même au crayon, on peut le couvrir d'un papier transparent ou d'un verre sur lequel on établira toutes les lignes de construction.

2° Lorsqu'il n'est pas chargé de détails ou que l'échelle est un peu grande et le trait assez apparent, on peut le calquer à la vitre sur le papier même qui doit recevoir la copie.

3° Si ce moyen ne peut être commodément employé, soit par suite de difficultés locales, soit à cause de l'opacité du papier, c'est sur une feuille transparente que l'on calque d'abord; puis, on reproduit cette première copie à l'aide du papier plombé; ou bien encore, on colle directement sur un calicot blanc la feuille qui porte le calque.

Ce dernier procédé a l'avantage précieux de donner au dessin obtenu une consistance supérieure à celle du papier; on est même arrivé à préparer dans ce but des toiles translucides qui dispensent de l'emploi du papier à calquer et du collage.

4° Quelquefois enfin, lorsque l'on peut, sans inconvénient, employer ce moyen qui offre souvent de grands avantages pour la promptitude d'exécution, on place directement le dessin sur la feuille de papier qui doit recevoir la copie, et l'on pique avec la pointe d'une aiguille les points

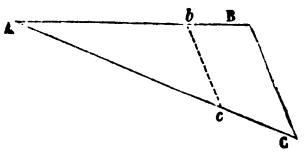
principaux en nombre suffisant pour que, en passant au trait, l'on puisse placer tous les détails.

193. S'il s'agit actuellement de changer l'échelle de la copie de telle sorte que les côtés homologues soient dans un rapport donné $\frac{1}{m}$, on commence par tracer un réseau de carreaux dont les côtés soient dans ce rapport avec ceux de l'original; puis, on opère comme ci-dessus, en réduisant toutefois dans le rapport indiqué les longueurs prises au compas sur le modèle. On se sert pour cela soit d'un *angle de réduction*, soit d'un *compas de réduction* dont nous allons indiquer la construction et l'emploi.

Il est clair que, si l'échelle du dessin primitif était $\frac{1}{e}$, celle du dessin réduit dans le rapport $\frac{1}{m}$ serait $\frac{1}{me}$; car, dans le premier cas, 1 mètre représentait e mètres du terrain et, dans le second, la même longueur de 1 mètre représenterait nécessairement une longueur m fois plus grande, ou me mètres.

194. Pour construire un *angle de réduction*, on trace deux lignes AB et BC, faisant entre elles un angle quelconque et sur lesquelles on marque des longueurs qui soient entre elles dans le rapport $\frac{1}{m}$ de la réduction projetée; on achève ensuite le triangle en unissant A et C; puis, on mène des parallèles à BC, lesquelles forment ainsi une série de triangles semblables ayant pour sommet commun le point A; or, il est évident que, si le côté à réduire est porté en Ab, par exemple, le côté bc mené

Fig. 128.

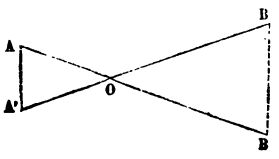


parallèlement à BC sera la longueur cherchée, puisque

$$Ab : bc :: AB : BC :: 1 : m.$$

195. Le *compas de réduction* se compose de deux branches AB, A′B′, se croisant en un point O qui en est le pivot, de telle sorte que les portions AO et A′O, BO et B′O soient toujours égales deux à deux. Dans un pareil instrument, la ligne qui unirait A à A′ serait toujours parallèle à celle qui irait de B en B′, et par suite on aurait constamment

Fig. 129.



$$AA' : BB' :: AO : OB.$$

Il résulte de cette disposition que, BB′ étant la longueur d'un côté sur le modèle, AA′ sera son homologue sur la copie, si l'on a établi d'avance, entre AO et OB, un rapport convenable qui n'est autre que celui $\frac{1}{m}$ des deux échelles. C'est ce à quoi l'on parvient facilement en raison de la construction de l'instrument, comme on peut le voir par la fig. 8 de la planc. III. Le pivot O, qui traverse les joues du compas, suit deux fentes longitudinales dans lesquelles on peut le faire glisser, quand elles sont superposées; les deux branches portent des graduations qui indiquent, quand elles correspondent au pivot ou à un indicateur disposé à cet effet, que le rapport de AO à OB est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

196. Quelquefois ce sont les surfaces, et non les côtés homologues, qui doivent être dans un rapport donné $\frac{1}{q}$; si nous représentons alors par S et S′ les surfaces des deux dessins ou les surfaces de deux portions homologues de ces

dessins, et par A et A′ des côtés homologues dans chacun d'eux, la géométrie élémentaire nous fournit la relation

$$S : S' :: A^2 : A'^2 :: 1 : q;$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

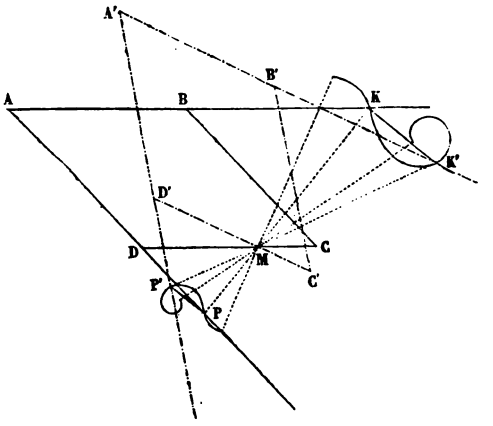
La question est donc encore ramenée maintenant à déterminer le côté A au moyen de son homologue A′ et de leur rapport $\frac{1}{\sqrt{q}}$; ce qui se fait, comme ci-dessus, au moyen de l'angle de réduction ou du compas de réduction.

197. Les différents moyens que nous venons d'indiquer deviennent fort longs, quand il s'agit de plans détaillés et d'une grande étendue; on y supplée par l'emploi d'un instrument appelé *pantographe* et dont nous allons indiquer l'usage par une description et des calculs succincts.

Le pantographe se compose généralement de quatre règles AB, BC, CD et DA, égales en longueur, ou au moins égales deux à deux, et unies par quatre articulations, de manière que leur ensemble forme toujours un losange ou un parallélogramme dont les angles seuls varient; à un point fixe K, situé sur l'une des branches AB ou sur son prolongement, est adapté un calquoir; en M est placé un axe vertical traversant une douille adhérente à la branche CD. Tout l'instrument peut ainsi se mouvoir autour de cet axe, qui est maintenu par une masse de plomb dans laquelle il est vissé.

Cela posé, si un crayon est placé en P, à la rencontre des lignes AD et KM, il décrira une figure semblable à celle

Fig. 130.



que l'on fera parcourir au calquoir K, et, de plus, le rapport des côtés homologues des deux figures sera le même que celui des distances du point M aux points K et P.

En effet, les côtés AK et DM sont parallèles dans toutes les positions de l'instrument, et les triangles AKP, DMP sont toujours semblables; ils fournissent donc, pour deux positions quelconques, les proportions

$$AK : DM :: KP : MP,$$
$$A'K' : D'M :: K'P' : MP';$$

mais, $AK = A'K'$ et $DM = D'M$;

on a donc $KP : MP :: K'P' : MP'$,

d'où

$$KP - MP \text{ ou } KM : MP :: K'P' - MP' \text{ ou } K'M : MP'.$$

Les deux triangles KK'M et PP'M sont donc semblables, puisqu'ils ont en M un angle égal compris entre des côtés homologues proportionnels; par suite, les lignes KK' et PP', respectivement parcourues par le calquoir et par le crayon, sont parallèles entre elles, et leur rapport est le même que celui de KM à MP. Il en est évidemment ainsi

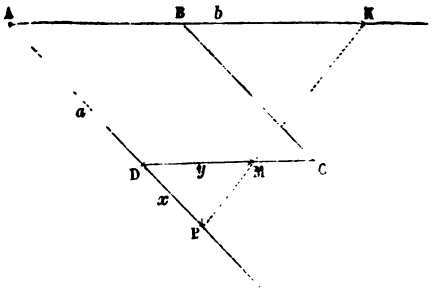
pour deux cordes de positions quelconques et aussi courtes qu'on voudra le supposer; les deux figures elles-mêmes jouissent donc de la propriété énoncée et du même rapport de similitude.

198. Il reste maintenant à graduer l'instrument, de telle sorte qu'il puisse servir à réduire un dessin dans un rapport donné $\frac{1}{m}$.

D'après ce que nous venons de voir, il faut et il suffit pour cela, que KM et MP soient eux-mêmes dans ce rapport; il faut par conséquent trouver des positions de M sur DC et de P sur AD qui satisfassent à la condition

$$KM : MP :: m : 1.$$

Fig. 131.



Or, si nous appelons respectivement a et b les constantes AD et AK, et si nous désignons par x et y les variables DP et DM, il résultera de ce que MD est toujours parallèle à AK, que l'on aura, quel que soit m,

$$a : x :: KM : MP :: m : 1$$

et

$$y : x :: AK : AP :: b : x+a,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{a}{m} \text{ et } y = \frac{bx}{x+a} = \frac{b}{m+1}.$$

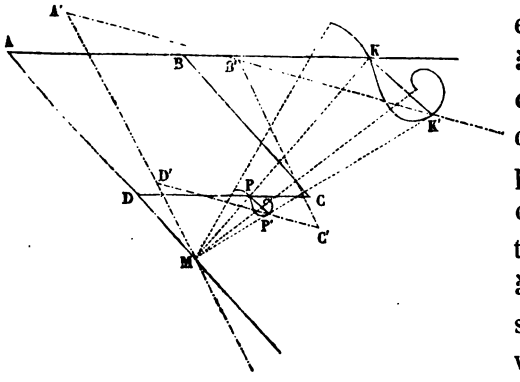
En attribuant ensuite différentes valeurs à m, on calcule celles de x et de y qui correspondent à chacune d'elles et

on les trace sur les deux branches du pantographe, qui se trouve ainsi gradué. On s'assure, du reste, de l'exactitude des longueurs obtenues pour x et y, en vérifiant si les trois points P, M et K sont bien sur une même ligne droite dans chaque système de valeurs.

Dans les anciens pantographes, ce n'était pas par le déplacement des points P et M sur les règles AD et BC que l'on modifiait le rapport des échelles, mais par le mouvement des deux points d'articulation B et D; le pivot central M restait alors constamment au même point de la branche BC, le plus souvent au sommet C lui-même.

199. Quelques constructeurs de pantographes placent le centre fixe à l'extrémité de la droite KM, c'est-à-dire sur la branche extérieure AD, et le crayon au point intermédiaire sur DC; il est clair que cette disposition n'influe en rien sur les considérations qui précèdent et que, dans cet état, l'instrument doit encore servir à réduire les dessins, ainsi qu'on le voit par la figure ci-contre. On trouve même à ce nouveau système l'avantage de présenter les deux figures semblables tournées dans le même sens par rapport au dessinateur, tandis que l'une d'elles est renversée dans l'état primitif de l'instrument; mais les deux feuilles de papier sont plus près l'une de l'autre et se super-

Fig. 132.



posent d'une façon fort incommode, dès que leurs surfaces sont un peu considérables.

Les calculs relatifs à la graduation du pantographe s'opèrent d'ailleurs d'une façon tout à fait analogue aux précédents, et l'on trouverait sans difficulté que, pour les mêmes valeurs de a et b, les variables x et y prennent les valeurs

$$x=\frac{a}{m'-1},\quad y=\frac{b}{m'},$$

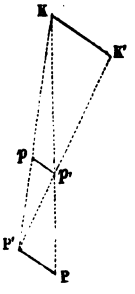
$\frac{1}{m'}$ étant le nouveau coefficient de réduction.

200. Certains instruments sont susceptibles d'être montés à la fois suivant les deux dispositions qui viennent d'être indiquées; une seule série de divisions peut même servir pour les deux modes; il est alors facile de voir, en égalant soit les deux valeurs de x, soit celles de y, que les deux quantités m et m' sont liées par la relation

$$m'=m+1,$$

c'est-à-dire que la même division qui donnait une réduction à $\frac{1}{m}$ avec le pivot placé entre la copie et l'original, réduit à $\frac{1}{m+1}$, quand on met au contraire le point fixe sur la grande branche.

Fig. 133.



On peut, du reste, retrouver ce résultat par des considérations purement géométriques : car, si KK′ est le chemin parcouru par le calquoir sur l'original, la réduction sera PP′ dans le premier système, pp' dans le second, et les trois lignes KK′, PP′, pp' seront parallèles.

Or, si l'on a

$$PP' : KK' :: 1 : m,$$

temps que

$$PP' : KK' :: P'p' : p'K',$$

igalement

$$P'p' : p'K' :: 1 : m,$$

it

$$P'p' : P'p' + p'K' \text{ ou } P'K' :: 1 : m+1.$$

ın autre côté,

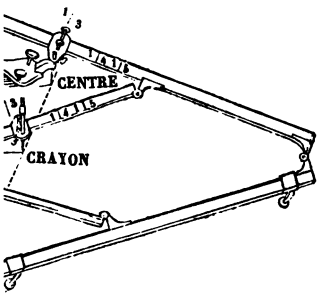
$$pp' : KK' :: P'p' : P'K';$$

si $pp' : KK' :: 1 : m+1,$

:onforme à ce qui a été établi plus haut.

Nous donnons ci-après le croquis d'un pantographe ıivant le dernier des deux systèmes qui viennent posés; il existe d'ailleurs encore d'autres dispositions, qui toutes rentrent plus ou moins dans les deux premières et sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas; mais, pour joindre à la théorie géométrique du pantographe une courte description de sa construction, nous

Fig. 134.



ıR.

ɔns (Planc. III, fig. 8) un dessin de cet instrument lus grande échelle.

vot fixe est cette fois entre les deux points mobiles;

on distingue facilement les coulisses dans lesquelles se placent le calquoir et le crayon, les roulettes adaptées au moyen de pinces aux extrémités des branches extérieures de l'instrument, la tige à laquelle tient le crayon et qui est surmontée d'une cuvette dans laquelle on peut placer un poids plus ou moins considérable, en raison de la dureté du crayon et de l'intensité du trait que l'on veut obtenir. Le fil indiqué par une ligne ponctuée passant par l'agrafe du pivot, est attaché à la partie inférieure du porte-crayon et traverse le tube dans lequel il a la faculté de monter et de descendre. Le dessinateur en tient constamment l'autre extrémité, de manière à soulever le crayon et éviter de tracer une ligne sur le papier, lorsqu'il veut porter le calquoir sur un autre point de l'original. Le pivot vertical traverse d'ailleurs la branche à laquelle il est appliqué et se visse, à sa partie inférieure, dans une masse de plomb garnie en dessous de pointes d'acier très-courtes et très-aiguës qui assurent la position du pantographe; des vis de pression, agissant sur les trois coulisses, en arrêtent le mouvement, lorsqu'elles sont une fois placées convenablement.

Deux séries de divisions sont généralement tracées sur les deux branches du pantographe qui portent le pivot et le crayon; l'une sert à reproduire un dessin de manière que les côtés homologues soient dans un rapport donné; l'autre s'emploie lorsque c'est le rapport des surfaces qui est déterminé. Nous avons vu plus haut que la graduation s'opère d'une manière identique dans les deux cas, puisque, si le rapport des surfaces est q, celui des côtés homologues est immédiatement exprimé par $\sqrt{q}$.

202. Il est généralement peu exact d'augmenter les dimensions d'un dessin, c'est-à-dire de passer d'une échelle

donnée à une plus grande. Si cependant, pour un motif quelconque, on avait besoin d'effectuer cette opération, il suffirait évidemment de changer de places entre eux le calquoir et le crayon et d'amener les index des coulisses aux divisions qui, sans cette mutation, auraient donné le rapport inverse.

203. Nous terminerons ce qui est relatif au pantographe, en attirant l'attention sur les précautions à prendre quand le dessin à réduire est d'une grandeur telle qu'on ne puisse se dispenser de déplacer l'instrument pendant l'opération; dans ce cas il faut, avant tout dérangement, tracer sur l'original et sur la copie des lignes de repère homologues. Soient AB, *ab* ces deux lignes en direction et en grandeur; après avoir donné à l'instrument sa nouvelle position, on place le calquoir sur le point A et l'on amène le point *a* de la copie sous la pointe du crayon; on déplace un peu l'instrument pour pouvoir enfoncer une aiguille en *a*; puis, après avoir placé le calquoir en B, on fait pivoter la feuille de copie jusqu'à ce que *b* vienne se placer précisément sous le crayon; on peut alors continuer la réduction.

TRACÉ D'UN AXE SUR LE TERRAIN.

PIQUETAGE.

204. Soit que l'on ait besoin d'une base pour effectuer une opération, soit qu'on veuille tracer sur le terrain la direction de la ligne magistrale, de l'*axe*, en un mot, d'une voie de communication quelconque, on est à chaque instant conduit à établir de grandes lignes droites qui, selon les circonstances, affectent des longueurs plus ou moins considérables et, notamment dans l'exécution des chemins de

fer, il n'est pas rare de trouver des *alignements* qui s'étendent, sans aucune déviation, sur plusieurs kilomètres; d'un autre côté, pour s'accommoder aux exigences locales, pour ne pas allonger inutilement les parcours et pour éviter des coudes brusques qui sont de véritables entraves à la circulation, les axes des tracés doivent fréquemment s'infléchir suivant des *courbes* dont la nature et les éléments dépendent de l'objet auquel elles se rapportent et dont la description matérielle exige un soin tout particulier.

Dans l'un et l'autre cas, qu'il s'agisse d'alignements droits ou qu'il s'agisse de raccordements curvilignes, on emploie sur le terrain, pour le tracé de ces lignes, des *jalons* (144) simplement formés de baguettes avec un voyant en papier, ou consistant en bâtons ferrés et peints en couleurs éclatantes, d'ordinaire en blanc et rouge, de manière à attirer de loin le regard. Quelquefois, pour faciliter l'opération et en conserver la trace, on plante en outre de grands signaux appelés *balises*; ce sont des troncs d'arbres élancés, dégarnis de branches et le plus souvent armés d'un petit drapeau flottant.

Ces signaux ou balises ne sont usités, on le comprend, que pour les points importants du tracé; à la jonction de deux alignements droits, par exemple, ou en des points tels que, malgré les aspérités du terrain, il soit toujours facile de découvrir, par leur moyen, la direction de l'axe. Pour les opérations de détail et entre autres, comme nous le verrons plus tard, pour l'exécution des nivellements ou pour celle des travaux eux-mêmes, on échelonne sur la ligne de forts piquets que l'on enfonce soit à fleur de terre, soit à une profondeur telle, que leur tête dépasse le sol d'une quantité constante et déterminée; chacun de ces piquets est numéroté

et rattaché à des repères fixes, tels que des bâtiments, des rochers, des arbres voisins, pour en faciliter la recherche ultérieure. La mention de tous ces détails est ensuite soigneusement faite sur un carnet et, s'il y a lieu, dans un procès-verbal, quand le *piquetage* est contradictoire entre des parties dont les intérêts sont différents.

Quoi qu'il en soit, nous allons successivement indiquer les divers moyens en usage pour le tracé des alignements droits et des raccordements curvilignes.

ALIGNEMENTS.

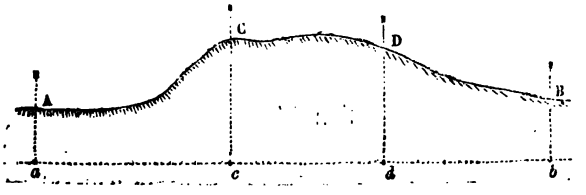
205. Le tracé des alignements droits sur le terrain n'offre généralement pas de difficulté sérieuse; trois cas cependant peuvent se présenter :

1° Si, du point initial d'un alignement, on peut découvrir l'autre extrémité, ou au moins un jalon vertical placé à cette extrémité, on plante également un jalon au premier point; puis, dirigeant un rayon visuel sur la ligne qui réunit les deux jalons, on en fait placer intermédiairement un nombre aussi grand qu'on le désire.

Il est bon de viser d'un peu loin et de faire passer le rayon visuel tangentiellement aux jalons et alternativement de droite à gauche.

2° Quand, de l'origine de l'alignement, on ne peut pas

Fig. 135.



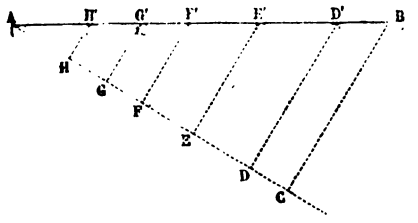
voir un jalon ou un signal quelconque situé à l'autre extrémité, ce qui arrive, par exemple, lorsque les points sont séparés par une aspérité du terrain, deux observateurs doivent chercher à se placer en deux points intermédiaires C et D, tels que celui qui est en C puisse voir les jalons B et D et que, réciproquement, de D on aperçoive A et C.

Alors l'observateur C fera placer D dans la direction de B et, si le point C se trouve en même temps dans la direction AD, les deux droites AD et CB, ayant une partie commune CD, n'en feront qu'une ACDB. Lorsqu'un premier essai n'amène pas ce résultat, on l'obtient après quelques tâtonnements; le problème est donc encore ramené au premier cas.

On voit d'ailleurs que ce procédé est exactement celui qu'il faudrait suivre, si chacune des deux extrémités de l'alignement était visible, mais inaccessible.

3° S'il est impossible aux deux observateurs de se placer intermédiairement dans les conditions que nous venons de supposer, soit parce que les deux points A et B sont séparés par un édifice, soit par tout autre motif, on dirige par l'un des points une droite AC sur laquelle on abaisse du point B, par le moyen de l'équerre ou du graphomètre, une perpendiculaire BC; on divise la longueur AC en autant de parties que l'on veut planter de piquets sur la direction AB et, par tous les points de division, on suppose menées autant de perpendiculaires DD',

Fig. 136.



EE′, FF′, etc., à AC, lesquelles sont toutes parallèles entre elles et à BC. Un calcul très-simple donne la longueur de ces perpendiculaires et, par suite, la position des jalons D′, E′, F′, etc.

Ce calcul n'offre aucune difficulté, puisque, tous les triangles de la figure étant semblables, on a

$$AH : HH' :: AC : CB,$$

d'où

$$HH' = \frac{AH \times CB}{AC}.$$

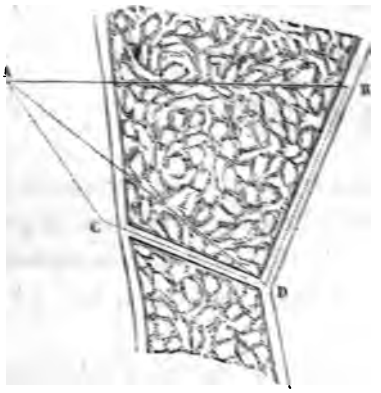
Or, AC et AH sont connus; ce sont des portions de la ligne auxiliaire qu'il est facile de mesurer, ainsi que la perpendiculaire CB; la valeur de HH′ est donc complétement et facilement déterminée; il en est de même de GG′, FF′, EE′, etc.

L'ensemble du calcul se simplifie encore, quand on peut partager la ligne auxiliaire en parties d'égale longueur, parce qu'alors chacune des perpendiculaires est égale à la valeur de la première répétée autant de fois qu'il y a de segments égaux entre son pied et l'origine A.

206. Le problème serait un peu plus compliqué, si la disposition des lieux était telle qu'il fût impossible de prolonger la ligne auxiliaire AC de façon à permettre le tracé des perpendiculaires; si, par exemple, le point A était situé auprès d'une forêt. Il faudrait alors avoir recours à des calculs trigonométriques, pour déterminer l'angle que fait cette ligne auxiliaire avec la direction AB; la connaissance de cet angle BAC permettrait alors de suivre, à l'aide d'un graphomètre, la direction AB, au fur et à mesure que l'on abattrait les arbres sur cette ligne pour établir le tracé projeté.

Pour calculer l'angle BAC, on réunirait le point A au point B par un contour polygonal dont les côtés seraient dirigés suivant les allées ou les clairières, telles que CD et BD; on supposerait menée la diagonale AD et l'on résoudrait d'abord le triangle ACD dans lequel on mesurerait directement les côtés AC et CD, ainsi que l'angle ACD; puis, le triangle ADB dans lequel AD est déterminé par le premier triangle, BD mesuré directement et l'angle ADB donné par la mesure directe de CDB et le calcul précédemment fait de l'angle ADC.

Fig. 137.



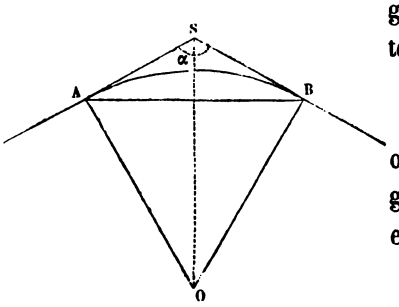
COURBES.

207. Pour satisfaire le mieux possible aux conditions qu'elles sont appelées à remplir, les courbes de raccordement sont tracées tangentiellement aux alignements droits à leur point de départ et à leur point d'arrivée; si, comme il est rationnel de le faire, pour répartir uniformément la courbure sur tous les points du raccordement, on adopte la forme circulaire, il convient généralement de choisir un rayon aussi grand que les localités peuvent le permettre.

Quand, par cette considération ou par toute autre, on a fixé le rayon du cercle de raccordement, le procédé qui se présente le plus naturellement à l'esprit, c'est de trouver le

centre et pour cela de mener, parallèlement à chacun des alignements et à une distance égale au rayon, deux droites qui se rencontrent au point cherché. Mais ce procédé, très-simple en exécution sur un plan, serait souvent bien pénible sur le terrain, qui pourrait d'ailleurs se trouver dans des conditions telles que la connaissance du centre ne fût d'aucune utilité pour décrire la courbe. Aussi a-t-on été obligé de chercher des méthodes pour tracer le cercle indépendamment de son centre; elles sont nombreuses et exigent toutes que l'on connaisse, outre le rayon du cercle qu'on se donne généralement *à priori*, la distance des points de contact au point de concours des tangentes dont l'angle α est déterminé et mesuré d'avance.

Fig. 138.



Or, le triangle rectangle SOA donne immédiatement

$$SA = \frac{AO}{\text{tang } OSA},$$

ou, en appelant T la longueur de la tangente SA et R le rayon OA,

$$T = \frac{R}{\text{tang } \frac{\alpha}{2}}.$$

Il est inutile de dire que, si la longueur des tangentes était donnée et que le rayon fût inconnu, la même relation le fournirait sous la forme

$$R = T \text{ tang } \frac{\alpha}{2}.$$

208. Cela posé, nous allons présenter quelques-uns des moyens les plus usités pour tracer le cercle sur le terrain,

quand on connaît la longueur des tangentes, leur angle et le rayon.

1° Cette opération peut se faire par des intersections de rayons visuels. On remarque que, pour tous les points de la courbe tels que m, l'angle AmB, que nous désignerons par β, sera constant et facile à déterminer en fonction de α, puisque ces deux angles qui, avec γ et δ, complètent les deux triangles ASB et AmB, sont liés par les relations

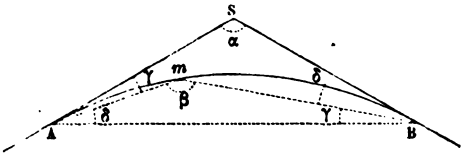
$$\beta+\gamma+\delta=180^\circ,$$
$$\alpha+2\gamma+2\delta=180^\circ,$$

d'où l'on tire, en éliminant $\gamma+\delta$,

$$\beta=90^\circ+\frac{\alpha}{2}.$$

On placera donc deux graphomètres, l'un en A et l'autre en B, l'alidade fixe de chacun d'eux étant dirigée dans le sens de la corde AB; puis, faisant décrire aux alidades mobiles des angles variables, déterminés de telle sorte que leur somme $\gamma+\delta$ soit égale à $180^\circ-\beta$, on aura, par les rencontres des deux rayons visuels, autant de points de la courbe cherchée qu'on le voudra.

Fig. 139.



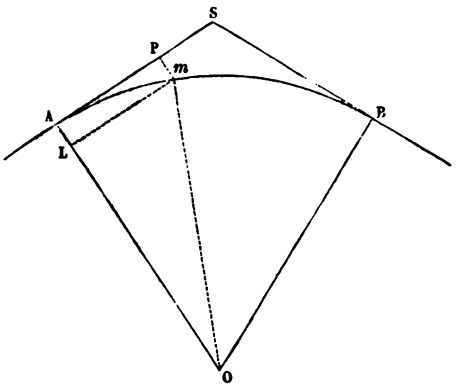
Cette méthode a l'inconvénient d'exiger deux observateurs, de n'être applicable que lorsque tout l'espace compris dans le segment AmB est visible des stations extrêmes, et de donner des déterminations souvent assez peu pré-

cises, à cause de l'obliquité des rayons visuels d'une station sur les rayons visuels de l'autre.

Elle peut toutefois subir une légère modification qui dispense de calculer l'angle β, si l'on remarque que, l'angle δ étant nécessairement toujours égal à mBS, puisque chacun de ces deux angles a pour mesure la moitié de l'arc mB, on est certain d'obtenir le point m ou tout autre point du cercle en faisant, en A, un angle δ quelconque avec la corde AB; puis, en B, un angle égal appuyé sur SB.

2° On trouve encore un point quelconque m de la courbe au moyen de son ordonnée Lm sur le diamètre passant par l'un des points de contact, ladite ordonnée étant calculée comme moyenne proportionnelle entre la distance variable AL à l'origine de la courbe et le diamètre 2R diminué de cette même distance AL; mais cette méthode exige que l'on puisse parcourir librement une grande partie du terrain compris dans le secteur AOB, ce qui peut être quelquefois impossible.

Fig. 140.



3° Cet inconvénient serait évité, si l'on calculait les ordonnées des points du cercle par rapport à la tangente AS, par exemple; ce calcul n'offre d'ailleurs aucune difficulté. Remarquons, en effet, que l'ordonnée Pm, ou son égale

AL, équivaut au rayon AO ou R, diminué de LO, et que, dans le triangle rectangle LO*m*,

$$LO=\sqrt{R^2-\overline{Lm}^2}=\sqrt{R^2-\overline{AP}^2};$$

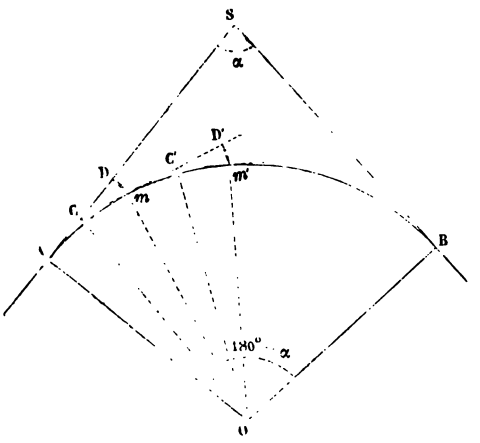
on a donc, en prenant une distance quelconque AP, la valeur de l'ordonnée correspondante P*m*, en posant

$$Pm=R-\sqrt{R^2-\overline{AP}^2}.$$

4° On peut enfin faire usage d'un procédé d'une simplicité pratique encore plus grande et qui nécessite moins aussi le facile parcours du terrain environnant.

Sur l'un des alignements à raccorder AS, prenons à partir du point A, où doit commencer le raccordement, deux longueurs égales AC, CD; du point C comme centre, avec CD pour rayon, décrivons un arc de cercle dont la corde est D*m*=*d*, et tirons la droite indéfinie C*m*; puis, recommençons sur cette ligne C*m*, à partir de *m* et en prenant les longueurs *m*D′=AD et D′*m*′=D*m*, les opérations que nous avons faites sur AS à partir du point A; les points A, *m*, *m*′,... *m*ⁿ qui seront successivement déterminés de la même manière, appartien-

Fig. 141.



dront à un cercle; car, si nous élevons en ces divers points des perpendiculaires sur les droites AC, CC′, C′C″, etc., ces perpendiculaires viendront toutes se rencontrer en un point O, qui ne sera pas autre chose que le centre du cercle dont il s'agit, et ce cercle sera nécessairement tangent à AS en A. Or, il est facile de déterminer les valeurs qu'il faut attribuer à AD=l et Dm=d, pour que ce centre coïncide avec celui du raccordement circulaire projeté, c'est-à-dire pour que le cercle ainsi obtenu vienne passer en B tangentiellement à SB. En effet, soit α l'angle compris entre les deux alignements à raccorder; n le nombre des points que l'on se propose de déterminer, par la construction indiquée ci-dessus, entre les points A et B; R le rayon du cercle; les valeurs à attribuer à l et d peuvent s'exprimer simplement en fonction des quantités connues, comme il suit :

Tous les angles en O sont égaux entre eux et, ces angles étant au nombre de $2n+2$, chacun d'eux est exprimé par $\frac{180°-\alpha}{2(n+1)}$; de plus, chacun des angles DCm est double de COm, par la raison que, tous les triangles en O étant égaux, l'angle mCO est égal à ACO, aussi bien qu'à mC′O, et par suite l'angle DCm, qui a pour supplément la somme des angles ACO et mCO, est égal à l'angle COC′ ou 2COm, lequel a pour supplément la somme des angles mCO et mC′O.

Cela posé, le triangle rectangle COm donne (123)

$$\mathrm{C}m = \mathrm{O}m \operatorname{tang} \mathrm{CO}m,$$

ou

$$\frac{l}{2} = \mathrm{R} \operatorname{tang} \frac{180°-\alpha}{2(n+1)},$$

et, dans le triangle isocèle DCm, la base Dm étant, comme

toujours, le double du sinus de l'angle au sommet, multiplié par l'un des côtés égaux, nous avons

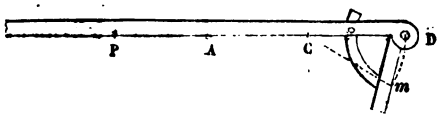
$$Dm = 2Cm \sin\frac{DCm}{2} = 2Cm \sin COm,$$

d'où

$$d = l \sin\frac{180° - \alpha}{2(n+1)}.$$

Pour décrire commodément des cercles par cette méthode, il faut avoir une règle égale à $\frac{3}{2}\,l$ au moins et portant, à l'une de ses extrémités, un petit bras gradué mobile autour d'une charnière, mais susceptible d'être fixé sur la règle d'une manière invariable.

Fig. 142.



Il suffit de marquer sur cette règle trois longueurs DC, CA, AP égales à la moitié de la valeur trouvée plus haut pour l et, sur la face extérieure du petit bras mobile, un point m tel que Dm soit égal à la valeur de d. On place alors la règle dans la direction du premier alignement, le point A coïncidant avec le point de contact; le point m de la règle donne un premier point de la courbe; on le marque par une fiche ou un piquet, ainsi que le point C sur la tangente, et l'on transporte la règle dans la direction Cm, le point P en C; le point m du petit bras donne un second point m' que l'on marque, ainsi que le point C′ où est tombé le point C de la règle, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on retombe sur le second point de contact en B.

Avec un peu d'habitude, on procède presque aussi rapidement par ce moyen que si l'on effectuait un simple métrage.

209. Quand le raccordement circulaire a été tracé sur

le terrain par l'un des moyens qui viennent d'être indiqués, il est nécessaire de connaître la longueur du développement curviligne substitué au parcours des deux tangentes: la mesure directe avec la chaîne suffit dans la plupart des cas; mais il est toujours bon de contrôler l'opération par l'évaluation numérique de l'arc entier. Rien n'est plus facile, quand on se rappelle que *dans une même circonférence, les longueurs de deux arcs quelconques sont entre elles dans le même rapport que les nombres de degrés auxquels ils correspondent.*

Or, si nous comparons l'angle au centre $180^\circ - \alpha$ à la circonférence entière qui correspond à 360° et dont la longueur est égale à $2\pi R$, π étant le rapport constant d'une circonférence à son diamètre et ayant la valeur connue 3,1416, nous pourrons poser

$$\text{arc AB} : 2\pi R :: 180^\circ - \alpha : 360^\circ;$$

d'où vient immédiatement

$$\text{arc AB} = 2\pi R \frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ} = \pi R \left(1 - \frac{\alpha}{180^\circ}\right).$$

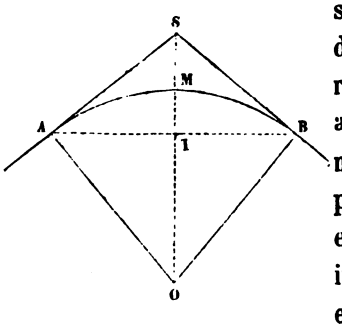
Supposons donc, comme exemple, deux alignements faisant entre eux un angle de 75° et raccordés par un arc de 800 mètres de rayon; la longueur de cet arc sera exprimée par

$$3.1416 \times 800 \left(1 - \frac{75}{180}\right) = 1465,996224,$$

ou, sensiblement, 1466 mètres.

210. Le point dont il importe le plus d'avoir la position précise, quel que soit le mode de description que l'on

Fig. 143.



adopte, est celui qui, situé sur la bissectrice de l'angle des tangentes, est le plus rapproché du sommet de cet angle. Outre que cette connaissance sert de vérification pour le tracé de la courbe, elle peut être d'une grande influence sur le choix à faire entre tel ou tel raccordement.

Or, le triangle rectangle AOS, dans lequel

$$SM=SO-OM=SO-R,$$

fournit $$SO=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{AS}^2}=\sqrt{R^2+T^2},$$

et ces deux égalités combinées fournissent

$$SM=\sqrt{R^2+T^2}-R.$$

C'est ici le lieu de remarquer que le même triangle rectangle SOA fournit, à raison de la perpendiculaire AI abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse,

$$OI\times SO=\overline{AO}^2,$$

ou $$OI=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+T^2}};$$

il en résulte donc, pour la flèche MI dont la valeur est OM—OI, l'expression

$$R-\frac{R^2}{\sqrt{R^2+T^2}}.$$

211. Les courbures prononcées étant défavorables à l'action des moteurs et à la facilité de la circulation, le

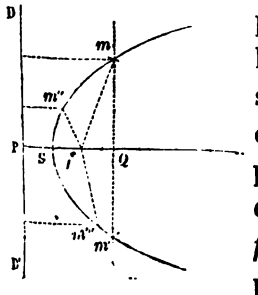
cercle est à la rigueur la courbe la plus convenable, par ce motif qu'il répartit uniformément la courbure sur tous les points de la ligne de raccordement, tandis que les autres courbes ne donnent en certains points des rayons plus grands qu'à la condition d'en donner de plus petits sur d'autres.

Néanmoins, quand l'angle des deux alignements à raccorder et le développement de l'arc de raccordement ne sont pas trop petits, les variations de la courbure peuvent devenir sans importance dans certaines limites, et alors le raccordement parabolique peut parfois offrir quelque avantage, parce qu'il permet de prendre indifféremment les deux tangentes de longueurs égales ou inégales, et qu'il laisse ainsi la faculté de conformer plus exactement le tracé à ce que demande le relief naturel du sol; il peut, du reste, se décrire sur le terrain par des moyens tout aussi simples que le cercle.

Eu égard à ces avantages respectifs, la *parabole* est employée concurremment avec le cercle pour les raccordements de tracé, suivant le plus ou moins de facilité que présente l'une ou l'autre courbe dans les divers cas particuliers.

212. Il n'entre pas dans nos vues de développer et de démontrer ici les nombreuses propriétés de la parabole; nous nous bornerons à dire, pour la faire suffisamment connaître, que cette courbe est le lieu géométrique des points m, m', m'', m'''... également éloignés d'un point fixe f appelé *foyer* et d'une droite fixe DD′ appelée *directrice*.

Fig. 144.



Il résulte de cette définition que la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice et que le point S, situé sur cette perpendiculaire à égale distance de son pied P et du foyer, est le *sommet* de la courbe. Ladite perpendiculaire est naturellement l'*axe* de la parabole qui est indéfinie au-dessus comme au-dessous de lui et qui n'a par conséquent pas de *centre*.

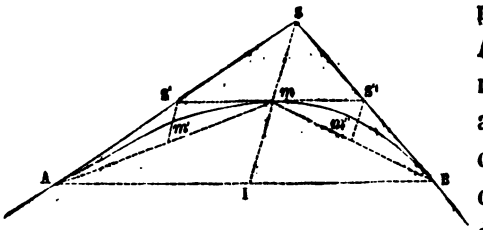
On voit, par ce qui précède, que, pour décrire par points une parabole dont le foyer et la directrice sont donnés, il suffit de tracer l'axe de la courbe, en abaissant une perpendiculaire du foyer sur la directrice; de mener une perpendiculaire quelconque MQ à cet axe, dans la région que doit occuper la parabole; puis, de couper cette nouvelle perpendiculaire par un cercle dont le centre est au foyer et dont le rayon est la distance PQ du pied de ladite perpendiculaire à la directrice; les deux points d'intersection m, m' ainsi obtenus sont nécessairement deux points de la parabole.

213. Cette construction, comme on le voit, ne serait d'aucune utilité dans la pratique, parce qu'en elle-même elle ne se prête pas aux opérations sur le terrain et parce qu'en outre elle implique la connaissance du foyer et de la directrice, éléments tout à fait étrangers à l'objet qui nous occupe. Une autre propriété remarquable et que nous allons simplement énoncer, répond au contraire parfaitement à cette question.

Si l'on unit le point de concours de deux tangentes quelconques au point milieu de la corde qui joint les points de contact, 1° *le point situé au milieu de la droite ainsi obtenue sera un point de la courbe;* 2° *une parallèle menée par ce point à la corde de contact sera tangente en ce même point à la parabole.*

Cet énoncé nous fournit sur-le-champ un moyen précieux et facile de raccorder deux alignements. Soient, en effet, A et B les points de raccordement et S le point de concours des deux lignes; nous tirerons AB, puis SI et nous aurons, au milieu m de cette dernière droite, un point de la parabole; menant ensuite par le point m la parallèle mS' à AB, nous aurons une nouvelle tangente $S'mS''$ dont chaque partie nous permettra de recommencer et de continuer autant que nous le désirerons la même série d'opérations, pour obtenir d'autres points m', m'', etc., de la courbe.

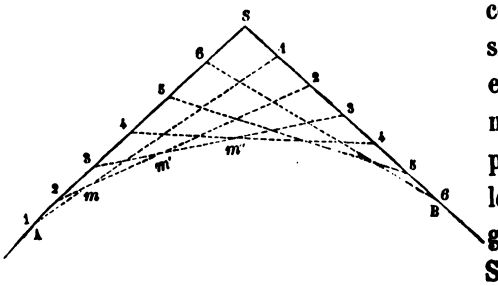
Fig. 145.



Il est à remarquer que les tangentes SA et SB n'ont nullement besoin d'avoir une égale longueur, et que l'évaluation exacte de cette longueur n'entre pour rien dans la construction, qui est purement géométrique.

214. La méthode suivante est peut-être d'un usage plus commode encore. Elle consiste à diviser en un même nombre de parties égales les deux longueurs SA et SB; à numéroter les points de division, à partir de A qui porte le n° 1, vers

Fig. 146.



S qui n'a pas de numéro, et à partir de S vers B qui porte le dernier numéro ; enfin, à joindre par des droites les points de division portant les mêmes numéros sur les deux lignes.

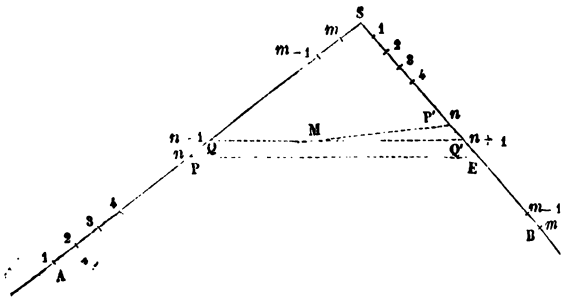
Les points m, m', m'', etc., déterminés chacun par l'intersection de deux droites successives ainsi menées, seront les sommets d'une ligne polygonale qui sera d'autant plus près d'être la parabole cherchée, que les points de division des tangentes seront plus multipliés.

Pour tracer la courbe avec toute l'approximation nécessaire, il suffira donc que deux observateurs placés à deux divisions successives sur AS, visent les divisions correspondantes de BS et fassent placer un jalon à la rencontre de leurs deux plans verticaux de visée.

215. La méthode qui précède présente cet inconvénient que, les droites successives se rencontrant sous des angles très-aigus, il reste souvent de l'incertitude sur l'exacte position des points d'intersection. Aussi se décide-t-on généralement à la compléter, en déterminant numériquement la position d'un certain nombre de points de la courbe, c'est-à-dire, en calculant leur distance à l'origine de l'une des droites sur laquelle chacun d'eux doit se trouver.

Soit à cet effet M l'un de ces points, déterminé par la

Fig. 147.



rencontre des deux droites PP′ et QQ′ qui correspondent respectivement aux points numérotés n et $n+1$, et proposons-nous de trouver, par exemple, l'expression de la longueur PM en fonction de la ligne entière PP′.

Menons PE parallèle à QQ′ et nous aurons,

d'une part, $PM : P'M :: Q'E : P'Q'$,

et, d'autre part, $SQ : SQ' :: PQ : Q'E$,

proportion qui fournit l'égalité

$$SQ' \times PQ = SQ \times Q'E.$$

Si maintenant l'on multiplie, dans la première proportion, le premier terme du second rapport par $SQ' \times PQ$, et le second terme du même rapport par la quantité égale $SQ \times Q'E$, il vient, toute réduction faite,

$$PM : P'M :: SQ' \times PQ : SQ \times P'Q'.$$

Or, soient a et a' les valeurs respectives des divisions qui sont en nombre m sur chacune des tangentes, nous aurons, avec $PQ = a$ et $P'Q' = a'$,

$$SQ = (m-n)\,a \text{ et } SQ' = (n+1)\,a',$$

lesquels, substitués dans la proportion précédente, donneront

$$PM : P'M :: (n+1)\,aa' : (m-n)\,aa' :: n+1 : m-n,$$

ou enfin $PM : PM + P'M$ ou $PP' :: n+1 : m+1$;

d'où $$PM = \frac{n+1}{m+1} PP'.$$

Il suffit donc, pour avoir la position exacte du point M, de

tracer sur le terrain la ligne PP′, de la mesurer exactement et de calculer, par la formule qui précède, la distance PM.

Si, par exemple, le nombre des divisions était égal à 9, il faudrait prendre,

sur la droite (1,1), les $\frac{2}{10}$ de la longueur de cette droite,

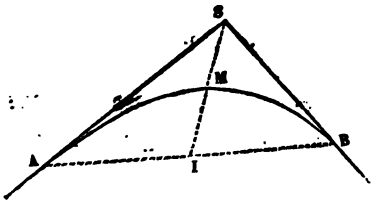
sur la droite (2,2), les $\frac{3}{10}$ — —

sur la droite (3,3), les $\frac{4}{10}$ — — —

et ainsi de suite, pour avoir autant de points de la courbe qu'on en voudra déterminer par ce moyen.

216. Un calcul bien simple ferait connaître, dans la parabole construite par le premier procédé, le point M de la courbe qui se trouve sur la droite menée du sommet S au milieu de la corde AB. La marche à suivre consisterait à calculer, dans le triangle SAB dont on connaît les côtés SA=T, SB=T′ et l'angle compris α, le côté AB et l'angle SAB. Connaissant AI qui est la moitié de AB, l'angle SAB et le côté T du triangle SAI, on calculerait facilement, par le même moyen, le côté SI dont la moitié donnerait la valeur de SM.

Fig. 148.



Lorsque les deux tangentes T et T′ sont égales, la droite SI devient la bissectrice de l'angle S; on a le choix, dans ce cas, entre le cercle et la parabole et l'on peut avoir intérêt à connaître laquelle de ces deux courbes se rapprochera le plus du sommet S. Or, pour le cercle, la distance

SM est représentée (210) par $\sqrt{R^2+T^2}-R$ et, dans la parabole, la quantité analogue est la moitié de SI qui est lui-même exprimé par $T\cos\frac{\alpha}{2}$.

Il s'agit donc de savoir

si $$\sqrt{R^2+T^2}-R \gtrless \frac{T}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

ou, en remarquant que R n'est autre chose que $T\,\text{tang}\frac{\alpha}{2}$ et que $\sqrt{R^2+T^2}$ est par conséquent égal à $T\sqrt{\text{tang}^2\frac{\alpha}{2}+1}$, ou bien (100), à $T\times\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$,

si $$T\times\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}-T\,\text{tang}\frac{\alpha}{2} \gtrless \frac{T}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

ou encore, en multipliant tous les termes par $\cos\frac{\alpha}{2}$ et divisant par T,

si $$1-\sin\frac{\alpha}{2} \gtrless \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

ou enfin, en remplaçant $\cos\frac{\alpha}{2}$ par sa valeur en fonction de $\sin\frac{\alpha}{2}$, et réduisant,

si $$\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}+1 \gtrless 0.$$

Or, il est évident que le premier membre de cette inégalité est toujours plus grand que zéro, puisqu'il n'est autre chose que le développement du carré de $1-\sin\frac{\alpha}{2}$.

Par conséquent, si l'on remonte à la première inégalité, on conclura que

$$\sqrt{R^2+T^2}-R>\frac{T}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire que la parabole se rapproche toujours plus que le cercle du point de concours des deux alignements.

Il importe de ne pas perdre de vue, dans cette conclusion, qu'il ne s'agit que de la parabole construite par le moyen des cordes et de leur point milieu; car, lorsqu'on trace la parabole au moyen des intersections successives de droites inscrites dans l'angle des tangentes, on trouve autant de courbes diverses qu'on a effectué de divisions différentes des tangentes en parties égales; le point M, qui est toujours alors au-dessous du milieu de SI, s'approche d'autant plus de ce point que le nombre m des divisions des tangentes est plus grand; ce n'est que quand ce nombre est infini, que le point M arrive et s'arrête au milieu de SI, ainsi que le constaterait la formule générale

$$SM=\frac{SI}{2}\times\frac{m+2}{m+1},$$

qui s'applique même au cas des tangentes inégales et que nous croyons inutile de démontrer dans ce travail.

On voit, d'après cela, que la courbe n'est déterminée qu'autant que l'on donne, avec les longueurs des tangentes et leur angle, le nombre m des parties dans lesquelles ces tangentes seront divisées pour le tracé.

217. En général, le problème du raccordement des alignements droits doit être résolu par les procédés qui viennent d'être exposés et qui, sans être les seuls, sont cependant les plus usuels; néanmoins, il peut arriver des circonstances où la régularité des formes entraînerait à un excès de dépense qui ne serait pas suffisamment justifié;

on peut et l'on doit étudier et tracer alors par tâtonnement des courbes qui ne sont pas susceptibles d'une définition géométrique et que l'on assujettit seulement à ne pas faire de jarrets brusques et à satisfaire d'ailleurs le mieux possible aux autres conditions du problème que l'on a en vue.

PLAN PARCELLAIRE.

218. Parmi les plans que les conducteurs des ponts et chaussées sont appelés à lever, il en est qui réclament une exactitude toute particulière ; nous voulons parler des *plans parcellaires*, qui sont destinés à servir de base à l'acquisition amiable ou à l'expropriation forcée des surfaces de terrain nécessaires à l'exécution des travaux projetés et sur lesquels on se contente de tracer géométriquement les limites des zones à acquérir, pour en calculer ensuite la contenance par parcelle.

S'il est presque toujours permis, pour les plans d'ensemble des projets, de se servir des levers cadastraux, les plans parcellaires au contraire doivent être dressés *ad hoc*, avec un soin minutieux, dans le double but d'arriver à des évaluations exactes des dépenses et d'ôter tout motif de contestation aux propriétaires, qui se montrent généralement peu satisfaits de voir leurs immeubles traversés par des voies de communication. Aussi l'Administration attache-t-elle une juste importance à ce que ces plans soient sans défaut et a-t-elle prescrit de les rapporter toujours à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, c'est-à-dire à $0^m,001$ pour 1 mètre.

On inscrit en outre sur chaque parcelle :

1° La lettre qui désigne la section cadastrale, avec le numéro d'ordre dans cette section;

2° Le genre de culture;

3° La dénomination locale ou vulgaire;

4° Le nom du propriétaire;

5° Un numéro d'ordre écrit en rouge et correspondant à celui que porte la même parcelle sur le tableau récapitulatif destiné au règlement des indemnités.

Quand on ne craint pas d'augmenter la confusion et de nuire à la clarté du plan, il est également commode de mettre, sur chaque parcelle ou division de parcelle, la contenance de la portion à prendre, ainsi que celle de la surface qui restera libre après l'exécution des travaux.

Ajoutons enfin que les plans parcellaires, étant destinés à subir, aux termes de la loi, les formalités de l'enquête publique dans les mairies, doivent être nécessairement dressés et, au besoin, scindés par commune.

219. Pour résumer et compléter les indications des plans parcellaires, on dresse, comme nous l'avons dit, un *tableau* récapitulatif *parcellaire* des surfaces à acquérir et des indemnités à payer, lequel reproduit les lettres, les numéros et les autres désignations inscrites sur le plan. Quant aux noms, le tableau officiel, dont le modèle a été donné par l'Administration, comporte deux colonnes, dans l'une desquelles on inscrit les noms qui figurent à la matrice cadastrale et, dans l'autre, ceux des propriétaires actuels et de leurs fermiers ou locataires.

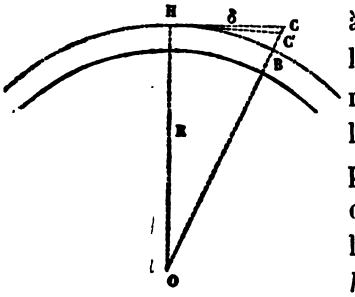
NIVELLEMENT.

220. Nous venons d'exposer les méthodes qui servent à obtenir la position *en plan* des divers points que l'on doit considérer sur le terrain ; il faut maintenant, pour compléter la connaissance des lieux, déterminer les hauteurs, ou plutôt les différences de hauteur des mêmes points. Cette seconde opération porte le nom de *nivellement ;* pour la bien comprendre, il faut se rappeler que la surface de la terre est sensiblement celle d'une sphère vers le centre de laquelle convergent toutes les verticales ; tous les points qui sont à la même hauteur, c'est-à-dire à la même distance du centre de la terre, sont dits au même niveau, et leur ensemble constitue une surface sphérique parallèle à la surface terrestre. Pour cette raison, une pareille sphère est dite une *surface de niveau* et, par extension, quelle que soit d'ailleurs la véritable forme du globe terrestre, on définit une surface de niveau par la condition d'être perpendiculaire en chacun de ses points à la direction du fil à plomb ; l'idée la plus claire d'une pareille surface nous serait encore donnée par l'état de repos d'un étang, d'un lac parfaitement tranquilles, ou mieux encore de l'Océan, si, les causes perturbatrices venant à être suspendues, ses eaux pouvaient arriver à un équilibre complet.

Ceci bien compris, les instruments qui servent au nivellement et qui portent eux-mêmes le nom de *niveaux*, ont pour objet, quand ils sont établis sur un point H, de dé-

terminer, dans une direction quelconque, le prolongement indéfini du plan horizontal passant par ce point; par conséquent, l'intersection C de ce plan de visée avec la verticale OC d'un point éloigné B, ne saurait être à la même distance du centre de la terre, c'est-à-dire au même niveau que le premier point et, pour ce motif, la ligne HC s'appelle la ligne de *niveau apparent*, par opposition à l'arc HB qui représente le niveau vrai; la longueur BC est donc la *hauteur* ou *l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai.*

Fig. 149.



Cette quantité BC, que nous appellerons h, a pour expression, en fonction de la distance HC ou δ et du rayon R de la terre,

$$h = OC - OB = \sqrt{R^2 + \delta^2} - R.$$

Telle est l'erreur commise quand on place un point de mire dans le plan de visée HC, pour avoir un point de niveau avec le point H; par suite il faut, pour avoir le point B lui-même, descendre au-dessous du point C de la quantité $\sqrt{R^2 + \delta^2} - R$.

Toutefois, une autre cause d'erreur en sens contraire est due à la réfraction du rayon visuel dans les couches d'air plus ou moins denses qu'il traverse; cette cause a pour effet de faire paraître le point C plus élevé qu'il n'est réellement, en sorte que ce n'est pas le point C lui-même que l'on voit en C, mais un autre point C′ situé au-dessous; l'erreur due à la sphéricité de la terre étant BC et celle due

la réfraction étant CC′, l'erreur due à la fois aux deux ıuses est donc en définitive réprésentée par

$$BC' \text{ ou } BC - CC'.$$

Nous avons déjà évalué BC; quant à CC′, diverses ex-ériences ont établi que, dans l'étendue des cas pratiques, n peut admettre avec sécurité que cette quantité est égale 0.16 BC. Il en résulte que

$$BC' = 0.84\,BC = 0.84\left(\sqrt{R^2+\delta^2} - R\right).$$

Voici les valeurs que prend cette différence du niveau rai au niveau apparent, pour quelques-unes des distances 'observation le plus en usage et en prenant, pour le rayon ıoyen de la terre, la valeur $R = 6366600^m$.

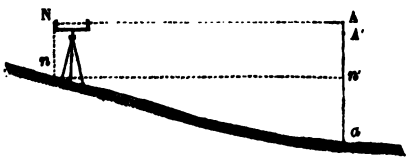
DISTANCES en MÈTRES.	ÉLÉVATION du NIVEAU APPARENT au-dessus du niveau vrai.	OBSERVATIONS.
20 m	0,0000	La valeur de $BC' = 0,84\,(\sqrt{R^2+\delta^2} - R)$ étant peu commode pour le calcul, on lui a substitué, dans la recherche des valeurs ci-contre, la relation approchée $BC' = 0,84\,\frac{\delta^2}{2R}$, établie d'après la considération de la tangente moyenne proportionnelle entre la sécante issue du même point et sa partie extérieure. On a ainsi $\overline{HC}^2$ ou $\delta^2 = BC \times (2R + BC)$; d'où l'on tire $BC = \frac{\delta^2}{2R+BC}$, et, en négligeant au dénominateur la quantité BC qui est toujours extrêmement petite par rapport au diamètre 2R de la terre, $BC = \frac{\delta^2}{2R}$.
40	0,0001	
60	0,0002	
80	0,0004	
100	0,0007	
120	0,0009	
140	0,0013	
160	0,0017	
180	0,0021	
200	0,0026	
300	0,0059	
400	0,0106	
500	0,0165	

Il importe de remarquer, à l'occasion de cette table, 1° qu'elle ne comporte pas un degré d'exactitude tel qu'on doive adopter et introduire comme rigoureux dans les opérations les résultats qu'elle fournit, calculés jusqu'à la quatrième décimale; 2° que, dans les limites de distances où restent généralement les opérations élémentaires d'un nivellement fait pour le service des ponts et chaussées, les corrections opérées au moyen de cette table n'affectent les résultats que de quantités insensibles; 3° qu'avec une précaution qui sera bientôt indiquée (223), il est d'ailleurs facile de se rendre à peu près indépendant des deux causes d'erreur dues à la sphéricité de la terre et à la réfraction des rayons visuels.

221. Les instruments qui servent à niveler sont le *niveau* et la *mire*. Le niveau, quelles que soient sa forme et ses dispositions, est destiné à diriger le rayon visuel de l'observateur, tout autour de son point de station, dans un même plan horizontal. La mire est simplement une règle graduée que l'on fait poser d'aplomb par un aide appelé *porte-mire* sur le point éloigné dont on s'occupe, afin d'en rendre la verticale visible. L'usage élémentaire de ces instruments consiste à mesurer la longueur A*a* interceptée sur la verticale du point *a* par le plan horizontal de visée.

A cet effet, la mire, dont le pied se place en *a*, porte ordinairement un *voyant*, c'est-à-dire une plaque mobile sur laquelle est tracée une ligne horizontale très-apparente, dite *ligne de foi*, et que le porte-mire, guidé par les

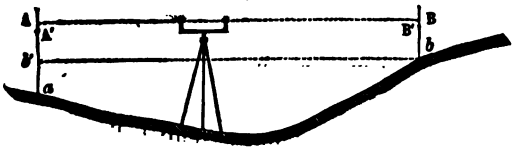
Fig. 150.



signes de l'opérateur, fixe au point où la ligne de foi rencontre le plan de visée; après quoi, la distance de cette ligne au pied de la mire donne la hauteur A*a* ou la *cote* du point *a* par rapport à l'horizontale NA.

222. S'il s'agissait uniquement de comparer les hauteurs de deux points, c'est-à-dire de mesurer leur *différence de niveau*, il suffirait de placer le niveau en N au-dessus de l'un *n* des points; de donner un coup de niveau sur le second point *a*; enfin, d'augmenter la cote obtenue A'*a* de la correction AA' fournie par la table précédente ou par la formule qui a servi à l'établir, et la cote ainsi rectifiée A*a*, comparée à la hauteur connue N*n*, ferait effectivement connaître la différence de niveau cherchée *n'a*. Mais on comprend qu'il serait souvent embarrassant et quelquefois même impossible de placer exactement le niveau dans la verticale du premier point; il est plus commode de choisir, à portée des deux points donnés, un troisième point où l'on place le niveau. On mesure alors séparément, de cette station, les deux cotes A*a* et B*b*, et leur différence *b'a* est nécessairement la distance verticale comprise entre les lignes ou surfaces de niveau qui passent par ces points, c'est-à-dire leur différence de niveau.

Fig. 151.



223. Ce qui porte encore puissamment à établir la station du niveau en dehors des deux points *a* et *b*, c'est que, si l'on se place, soit au milieu de la distance *ab* qui les sépare, soit en tout autre point également distant de chacun d'eux on trouve l'avantage précieux de se rendre indépen-

dant des erreurs de sphéricité et de réfraction, puisque ces deux erreurs, affectant les cotes de la même quantité et dans le même sens, disparaissent de leur différence; il est donc alors inutile de corriger les cotes $A'a$, $B'b$ pour avoir la différence de niveau $b'a$, car évidemment

$$A'a + AA' - (B'b + BB') = A'a - B'b = b'a,$$

si $AA' = BB'$ et, en général si, par une cause quelconque dépendant soit des circonstances extérieures, soit même de la construction du niveau, les deux rayons visuels sont déviés de l'horizontale de quantités égales et dans le même sens pour des distances égales.

Il est toutefois bon d'observer que l'égalité mathématique des distances n'est pas indispensable et qu'il suffit de remplir à peu de choses près cette condition, les corrections des cotes étant par elles-mêmes très-petites et, à plus forte raison, leurs différences étant beaucoup trop faibles pour affecter d'une manière sensible les résultats.

NIVEAU D'EAU.

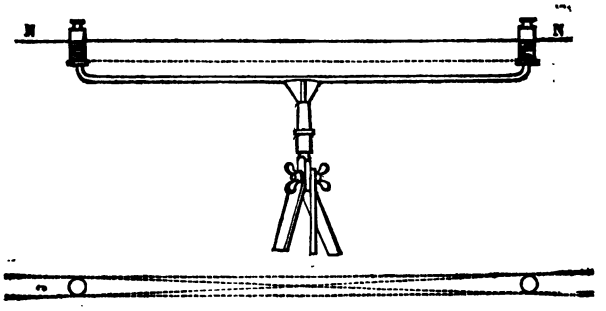
224. Comme on le voit, le point essentiel d'un nivellement est d'avoir des instruments qui permettent de mesurer aussi exactement que possible la cote brute d'un point éloigné; ces instruments qui sont plus ou moins perfectionnés, selon le plus ou moins de précision exigé par l'opération que l'on a en vue, ont pour objet unique de déterminer un plan horizontal dans le lieu où ils sont établis; le plus simple de tous est le *niveau d'eau*.

Ce niveau consiste en un tube de cuivre ou de ferblanc, redressé en coude à ses deux extrémités et maintenu dans

une position à peu près horizontale au moyen d'une douille conique qui s'applique sur la tige verticale d'un pied à trois branches. Les deux bouts recourbés se terminent par deux fioles de verre sans fond, d'un même diamètre, et le tout est rempli d'eau, de manière que le liquide arrive vers le milieu ou les deux tiers de la hauteur de chaque fiole. On reconnaît du reste que la tige qui supporte le tube approche suffisamment de la direction verticale, en faisant faire à l'instrument un tour d'horizon, et en examinant si la hauteur de l'eau ne change pas sensiblement dans les verres pendant le mouvement.

Dans cet état, le plan horizontal NN déterminé par les surfaces supérieures des colonnes d'eau est le même dans toutes les positions du niveau; par conséquent, toutes les tangentes menées à la fois aux deux intersections de la surface de l'eau avec les tubes qui la renferment sont des

Fig. 152.



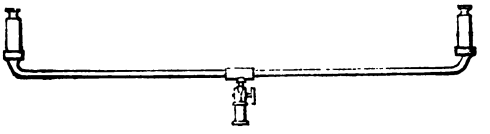
horizontales situées dans le même plan; toutefois, il faut observer que ces intersections ne sont pas, dans la pratique, des lignes nettement déterminées; l'eau, en vertu de l'attraction moléculaire, se relève contre les parois du verre et y forme un *onglet* annulaire dont l'épaisseur rend un peu incertaine la direction des rayons visuels tangents. Pour

pointer avec exactitude, on doit s'éloigner à quelque distance de l'instrument, à un mètre environ de la fiole oculaire; les onglets paraissent alors comme des lignes noires bien tranchées qui seraient tracées sur le verre même.

225. Une condition essentielle d'exactitude, pour l'opération faite au niveau d'eau, consiste dans l'égalité des diamètres des deux fioles; ce point est capital, non-seulement pour que les deux onglets aient la même épaisseur, mais encore et surtout pour que le plan horizontal déterminé par les surfaces supérieures de l'eau reste constamment le même, quand on fait tourner l'instrument sur lui-même pour donner différents coups de niveau d'une même station. On comprend en effet que cette constance du plan de visée ne saurait être obtenue, avec des fioles à diamètres inégaux, que dans le cas pratiquement irréalisable d'un axe de rotation parfaitement vertical.

226. Dans les niveaux les plus soignés, un genou à coquille permet de faire faire facilement au niveau les mouvements nécessaires pour le placer dans une position à très-peu près horizontale; ces instruments sont généralement en cuivre et composés de plusieurs parties destinées à être renfermées dans une boîte: les fioles se démontent à vis, ainsi que les trois parties dont se compose le tube principal, et il importe beaucoup que tous ces assemblages ne laissent échapper aucune portion du liquide; car toute déperdition serait une cause d'abaissement continuel du plan de visée.

Fig. 153.



227. Les principales précautions usuelles qu'il convient de prendre, quand on se sert du niveau d'eau, sont :

1° De faire sortir les bulles d'air qui restent souvent engagées dans l'eau du tube inférieur et d'attendre ensuite que le liquide soit revenu à l'état d'équilibre; quand l'air est agité, on accélère ce moment en bouchant partiellement les goulots des fioles.

2° De faire faire toutes les visées d'une même station par la même personne, deux observateurs prenant rarement les mêmes points des onglets pour déterminer le plan de niveau.

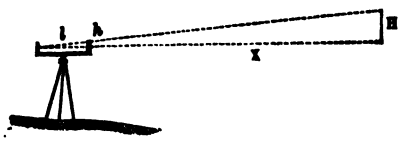
3° Pour rendre les onglets plus apparents, on colore quelquefois l'eau avec du carmin ou, ce qui vaut mieux encore, on lui donne un reflet noirâtre au moyen de lames de fer-blanc formant portion d'enveloppe, noircies et vernies intérieurement et que l'on adapte sur les tubes, de manière toutefois à laisser voir les portions de la surface supérieure du liquide, nécessaires pour diriger le rayon visuel. Quelques personnes préfèrent une teinte rouge que l'on obtient en appliquant un papier de cette couleur entre le verre et les enveloppes.

4° Quand on reste longtemps en station au même point, on doit avoir égard à l'évaporation de l'eau, surtout si le soleil frappe sur l'instrument, ou à l'augmentation du liquide, s'il pleut avec quelque abondance. C'est pour remédier autant que possible à ces inconvénients, que les fioles ont un orifice étroit qu'il est facile de boucher, et que le plus souvent elles sont munies de couvercles métalliques qui les protégent en outre dans les transports. Si l'on opère dans l'hiver, on se sert d'eau alcoolisée pour éviter la congélation.

228. Pour terminer ce que nous avons à dire sur le

niveau d'eau et son usage, observons qu'un rayon visuel qui s'écarterait de l'horizontale de la quantité h dans l'intervalle l des deux fioles, s'en écarterait nécessairement de la quantité $H=\frac{Xh}{l}$ à la distance de visée X; si donc on suppose que le maximum de l'erreur admissible dans un coup de niveau d'eau soit $0^m,01$, et que l'écart moyen des rayons de visée au-dessus ou au-dessous de l'horizontale soit un demi-millimètre ou $0^m,0005$, dans la longueur du niveau que nous supposerons elle-même égale à $1^m,25$, la distance à laquelle il conviendra de limiter approximativement la portée des coups de niveau d'eau sera donnée par la relation

Fig. 154.



$$X=\frac{lH}{h}$$

qui, avec les données numériques ci-dessus, fournit

$$X=25^m.$$

Il est bien entendu que, d'un côté, plus l'observateur aura l'habitude du niveau d'eau, plus il pourra impunément allonger les portées au delà de cette limite et que, d'autre part, plus le nivellement exigera d'exactitude, moins il faudra regarder à raccourcir les distances et à multiplier les stations.

NIVEAU A BULLE D'AIR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

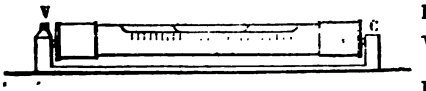
229. Cet instrument consiste dans un tube de verre, de forme à peu près cylindrique, presque entièrement rempli

d'un liquide et fermé hermétiquement à ses deux bouts, de manière à laisser un petit espace occupé par une bulle d'air ou absolument vide; on donne au tube une légère courbure pour que le milieu soit plus élevé que les extrémités, disposition qui, en raccourcissant la bulle, la fait s'arrêter en un point où la tangente intérieure est nécessairement horizontale. Si donc l'on fixe extérieurement au tube une règle parallèle à la tangente menée en son milieu, il suffira d'amener la bulle en ce point pour que la règle devienne elle-même horizontale.

Tel est l'instrument que l'on nomme *niveau à bulle d'air;* pour en rendre l'usage plus commode, on le renferme dans une garniture ou boîte cylindrique en cuivre, échancrée par dessus et qui ne laisse à découvert que sa partie moyenne où est le point que la bulle doit atteindre pour indiquer l'horizontalité de la règle inférieure. Une échelle de division, gravée sur le verre même ou sur les bords de la garniture, permet de reconnaître et d'apprécier les écarts du milieu de la bulle.

230. Les usages du niveau à bulle d'air que nous venons de décrire sont nombreux et cet instrument remplace avec avantage, dans les opérations délicates, le *niveau de maçon* ou de charpentier. Afin de pouvoir le rectifier au besoin, on fixe la garniture du tube sur la règle inférieure, au moyen d'une charnière C et d'une vis V avec laquelle on peut l'élever ou l'abaisser, jusqu'à ce que le parallélisme voulu soit établi. On emploie à cet effet la méthode dite du *retournement :* on pose le niveau sur une règle bien dressée et suffisam-

Fig. 155.



ment rigide, horizontale ou non; on élève ensuite peu à peu l'une des extrémités de cette règle, de manière que la bulle s'arrête entre ses repères. Il est bien clair que, si l'instrument est juste, la règle sera devenue horizontale; donc, en le retournant bout pour bout, la bulle devra encore revenir entre ses repères. S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si le niveau est inexact, on tournera la vis de rappel jusqu'à ce que la bulle se retrouve au milieu du tube, en comptant le nombre de tours qu'il aura fallu faire pour obtenir ce résultat; on fera enfin, en sens contraire, la moitié de ce nombre de tours, et le niveau sera rectifié.

Toutefois, comme on ne peut apprécier qu'approximativement de combien on a tourné chaque fois la vis de rappel, la rectification n'est pratiquement complète qu'après plusieurs épreuves successives; l'opération doit donc être recommencée, tant que le niveau retourné bout pour bout ne conserve pas la bulle exactement entre ses repères. Dans la dernière épreuve, le chemin que la bulle doit parcourir pour arriver au milieu du tube étant susceptible d'être mesuré par le moyen de la graduation de l'instrument, on n'a plus à tourner la vis que dans un seul sens, jusqu'à ce que la bulle ait fait la moitié de ce chemin.

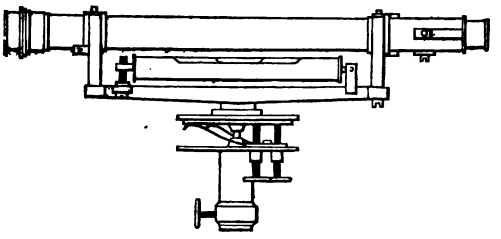
251. Il est nécessaire que le liquide renfermé dans le tube puisse résister aux plus grands froids sans perdre sa fluidité; l'eau ordinaire n'est donc point propre à cet usage. L'alcool ou l'éther réunissent à l'avantage d'une extrême mobilité, celui de ne jamais geler; l'expérience a démontré qu'en employant ces liquides, on obtient une bulle plus épaisse, moins longue et dont l'œil distingue plus facilement les limites.

NIVEAU D'ÉGAULT. — USAGE ET VÉRIFICATION.

252. Pour appliquer le niveau à bulle d'air que nous venons de décrire au nivellement à distance, on y adapte, parallèlement à la règle, soit un système de pinnules, soit une lunette destinée à diriger un rayon visuel horizontal et semblable à celle que nous avons décrite (147) à l'occasion de la stadia, sauf en ce qui concerne le réticule qui porte simplement ici deux fils rectangulaires; le niveau à lunette est de beaucoup le plus usité, et celui dont nous allons d'abord parler est dû à M. l'ingénieur en chef Egault, dont il a conservé le nom.

Il se compose, comme nous venons de le dire et comme l'indique la figure 156, d'une lunette posée sur deux collets que porte à ses extrémités la règle du niveau à bulle d'air; cette règle, et avec elle la lunette, doit être placée dans une position parfaitement horizontale, en même temps que le tout doit pouvoir se mouvoir dans un tour complet d'horizon, pour les visées à faire sur différents points, sans changer de station. On obtient ce double résultat en composant la tige qui supporte le système, de deux parties,

Fig. 156.



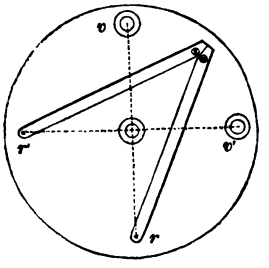
l'une fixe, engagée invariablement dans le pied de l'instrument, l'autre mobile avec la règle et la lunette. Chacune

de ces deux parties porte en outre, à l'approche de son point de jonction avec l'autre, un plateau circulaire destiné à régler, par le moyen de vis à caler et de ressorts, la direction verticale du pivot mobile et par suite l'horizontalité de la règle qui lui est perpendiculaire (voir, pour plus de détails, la planche IV, figures 1 et 2, à la fin du volume).

233. Lorsque l'instrument a été réglé de manière à pouvoir être employé à niveler, la bulle d'air, les génératrices passant par les points de contact correspondants de la lunette avec les collets, l'axe optique de la lunette et le plateau mobile, doivent tous se mouvoir dans des plans parallèles qui seront horizontaux, si l'un d'eux, celui du plateau, par exemple, est rendu horizontal.

Pour arriver à ce résultat indispensable, le premier soin à prendre, après avoir posé le pied solidement sur le terrain, de façon à rendre sa tablette supérieure approximativement horizontale et avoir assujetti, par la vis de pression de la douille, l'instrument sur ce pied, consiste donc à amener le plateau mobile dans un plan parfaitement horizontal, au moyen de deux vis à caler v, v' et de deux ressorts r, r' appuyés sur le plateau inférieur qui est fixé invariablement sur la tige. Les deux vis sont placées aux extrémités de deux diamètres rectangulaires, et les deux ressorts viennent supporter le plateau supérieur aux extrémités opposées des mêmes diamètres; il est aisé de voir, d'après cette disposition, que, si l'on suppose l'horizontale de la bulle exactement parallèle au plateau mobile et si l'on place successivement la règle

Fig. 157.



du niveau dans la direction de chacun des diamètres rectangulaires, on rendra ces deux diamètres horizontaux par une simple manœuvre de la vis et au moyen des indications de la bulle; par conséquent, le plateau mobile sera lui-même parfaitement horizontal, puisqu'il contiendra deux droites concourantes horizontales.

Mais il arrive presque toujours que l'instrument n'est pas réglé, c'est-à-dire que le plateau supérieur n'est rigoureusement parallèle ni à la bulle d'air, ni aux génératrices de contact, ni à l'axe optique de la lunette ; il faut toujours au moins s'assurer si ces conditions sont remplies, et nous allons successivement les examiner, en indiquant les moyens de remédier à tout dérangement de cette nature.

1° *Rendre l'horizontale de la bulle parallèle au plateau supérieur.*

Il faut pour cela, en même temps que l'on s'occupe de placer le plateau supérieur horizontalement, et tandis que le tube de la bulle est dans la direction de l'un des diamètres régulateurs, tourner la vis correspondante jusqu'à ce que cette bulle soit entre ses repères; puis, faire décrire à tout l'instrument un angle de 180° autour du pivot. Si la bulle revient à ses repères, c'est une preuve que le parallélisme demandé existe; dans le cas contraire, on corrige la déviation, moitié au moyen de la vis de rappel placée à l'extrémité de la bulle, moitié avec la vis à caler, et l'on répète cette épreuve jusqu'à ce que toute déviation ait disparu.

Enfin, on continue la fixation du plateau mobile comme on l'a vu plus haut, en mettant la bulle dans la direction du deuxième diamètre et tournant la vis correspondante, jusqu'à ce que làdite bulle s'arrête entre ses repères.

Remarque. Quelques niveaux d'Egault sont portés par

trois vis à caler et, dans cette disposition, on établit la bulle, d'abord parallèlement à la ligne qui joint deux d'entre elles, puis dans la direction perpendiculaire déterminée par la troisième.

2° *Rendre l'axe de figure de la lunette parallèle au plateau horizontal.*

On obtient ce résultat en visant avec la lunette un point placé à une distance et à une hauteur convenables, faisant ensuite décrire à tout l'instrument un angle de 180°, et tournant la lunette bout pour bout, sans changer celle des génératrices qui touchait le fond des collets. Dans cette nouvelle position, on vise le point de mire adopté, et, s'il se trouve au-dessus ou au-dessous de la ligne de visée, c'est que la génératrice inférieure n'est pas bien horizontale, c'est-à-dire que l'un des collets est plus bas que l'autre, défaut facile à corriger, après quelques tâtonnements, par le mouvement d'une vis de pression placée sous l'un des deux et qui peut servir à le relever.

3° *Rendre l'axe optique de la lunette parallèle au plateau horizontal*, ou, ce qui revient maintenant au même, parallèle à l'axe de figure. Il faut, en effet, que le rayon visuel, passant par le centre de l'objectif et par la croisée des fils, coïncide avec l'axe de figure du cylindre extérieur dont font partie les surfaces qui s'appuient sur les collets. On vérifie si cette condition est remplie, en visant un point éloigné, et en faisant ensuite tourner la lunette de 180° autour de son axe. Si le point de mire dont l'image, dans la première visée, se trouvait sur le fil horizontal, se trouve, dans la seconde, au-dessus ou au-dessous de ce fil, on amène le fil horizontal à la position qu'il doit occuper, en lui faisant parcourir, au moyen d'une vis placée à l'extré-

moitié du fil vertical, la moitié de la distance qui le sépare de l'image du point de mire dans cette seconde observation.

Par une opération analogue, et en prenant pour point de mire une ligne verticale, on déterminerait facilement la position de l'autre fil et la lunette serait alors complétement *centrée*.

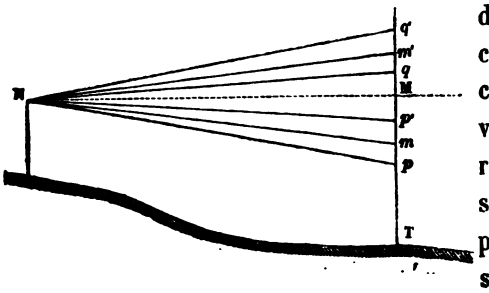
Nous avons dit, et il est évident *à priori*, que l'un des fils du réticule d'une lunette à nivellement doit être horizontal; cette condition est assurée par le constructeur au moyen de goujons d'arrêt, attachés au corps de la lunette et butant contre des vis fixées aux collets ; toutefois, pour s'assurer si les vis de butée sont trop ou trop peu allongées, on peut viser un point bien distinct qui tombe sous le fil et faire tourner l'instrument autour du pivot rendu d'abord vertical. Si le fil est horizontal, il ne cessera pas de couvrir le point visé, tant que ce point pourra être aperçu; dans le cas contraire, ce point quittera le fil et s'en éloignera. Pour corriger ce défaut, on doit retirer suffisamment les vis de butée, chercher par le tâtonnement une position de la lunette où le fil soit bien horizontal et tourner enfin les vis jusqu'à ce qu'elles touchent, sans les déplacer, les goujons d'arrêt.

234. Telles sont les vérifications à faire au moment où l'on est sur le point de commencer un nivellement avec le niveau d'Egault; lorsque les conditions qu'elles imposent sont exactement remplies, l'axe optique de la lunette est une horizontale qu'on peut diriger dans tous les sens pour donner des coups de niveau. L'instrument pourra dès lors être transporté sur une nouvelle station et sera en état de servir, dès qu'on en aura rendu le plateau supérieur horizontal. Néanmoins, si la distance du nouveau point de mire n'était pas la même que celle pour laquelle le centrage primitif a

eu lieu, la lunette pourrait se trouver décentrée, par suite du déplacement du porte-fils dont la position varie avec l'éloignement des objets visés. C'est là une raison à ajouter à celles que nous avons données (223) pour placer, autant que possible, chaque station à égale distance des deux points que l'on veut comparer et il y aurait, par suite, un grand avantage à adopter une même distance pour toutes les stations d'un nivellement; mais, comme il serait souvent impossible et toujours très-long de prendre ce soin, on a dû chercher, et c'est encore à M. Egault qu'on la doit, une méthode qui permît d'opérer en toute sécurité avec un instrument décentré, et dans lequel même l'horizontale de la bulle et l'axe de figure ne seraient pas parallèles au plateau supérieur. Cette méthode consiste à donner sur le point à niveler quatre coups répondant aux quatre positions de la lunette dans lesquelles le fil est horizontal, après qu'on s'est uniquement préoccupé de rendre le plateau horizontal et de préparer la lunette, en ce qui concerne seulement les distances du réticule et de l'oculaire, eu égard à l'éloignement du point de mire et à la vue de l'observateur.

Si donc l'on prend sur un point T deux cotes Tp, Tp', l'une avant, l'autre après avoir fait décrire à la lunette un angle de 180° autour de son axe, il est clair que, dans ces deux observations, le fil horizontal se sera successivement placé à égale distance au-des-

Fig. 158.



sus et au-dessous de l'axe de figure de la lunette, et que la moyenne Tm des deux résultats obtenus correspondra précisément à cette position, c'est-à-dire à la cote qu'aurait fournie une seule observation, si la lunette avait été centrée.

Si maintenant l'on retourne la lunette bout pour bout dans ses collets, et que l'on ramène, avec tout le système, l'oculaire vers l'œil par un pivotement à 180°, en ayant soin toutefois que le fil horizontal de la lunette soit encore bien horizontal après le retournement, et qu'à chaque coup la bulle soit rappelée au milieu de son tube, on répétera, dans cette nouvelle position de l'instrument, les deux opérations faites d'abord et l'on obtiendra deux nouvelles cotes Tq, Tq', dont la moyenne Tm' aurait été fournie, comme la précédente, par une seule observation, si la lunette avait été centrée.

Or, il est évident que, dans ces deux couples d'observations, l'axe optique, comme l'axe de figure, s'est successivement placé dans deux positions symétriques par rapport à sa position normale NM, de telle sorte que la cote réelle TM n'est autre chose que la moyenne des deux moyennes précédemment obtenues, c'est-à-dire la moyenne des quatre observations partielles. On a, en un mot :

$$\mathrm{TM} = \frac{\mathrm{T}m + \mathrm{T}m'}{2} = \frac{\mathrm{T}p + \mathrm{T}p' + \mathrm{T}q + \mathrm{T}q'}{4}.$$

De plus, si l'on remarque que

$$\mathrm{TM} = \frac{\mathrm{T}p + \mathrm{T}q'}{2} = \frac{\mathrm{T}q + \mathrm{T}p'}{2},$$

on conclura qu'il suffirait, pour avoir le résultat cherché, de faire deux des quatre observations indiquées, la première

et la quatrième, par exemple, ou la seconde et la troisième; ce qui veut dire qu'après avoir visé une première fois dans une position quelconque du niveau, il suffit de viser une seconde fois, après avoir, d'un seul coup, retourné la lunette bout pour bout, l'avoir fait tourner sur elle-même de 180°, et avoir ramené vers soi l'oculaire; la moyenne des deux résultats donne nécessairement la cote cherchée.

C'est suivant ce dernier mode que l'on opère habituellement, même quand on dispose d'un niveau réglé, parce que cette précaution permet de corriger les erreurs qui pourraient résulter du dérangement de l'instrument pendant la durée des opérations. On doit d'ailleurs s'attacher toujours à régler son niveau avant de s'en servir, afin que les corrections n'aient à porter que sur de très-petites différences et qu'on soit averti, si ces différences devenaient trop fortes, de l'inexactitude des visées, du dérangement du niveau ou de la présence d'une cause quelconque, capable d'altérer les résultats du nivellement.

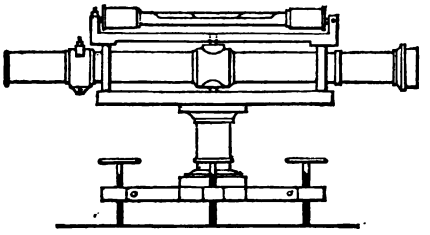
NIVEAU DE LENOIR. — USAGE ET VÉRIFICATION.

235. Il existe un niveau de Lenoir qui présente les mêmes moyens de vérification et de correction que celui d'Egault; il n'en diffère du reste qu'en ce que l'axe de rotation de l'instrument, au lieu d'être rendu vertical au moyen de vis agissant sur un plateau du centre duquel cet axe s'élève à angle droit, traverse un manchon conique et est amené dans la position qu'il doit prendre par l'action de quatre vis latérales qui agissent à angle droit contre lui. Mais l'instrument plus spécialement appelé *niveau de Lenoir* et que, pour le distinguer de l'autre, on désigne quelquefois sous le nom de

niveau-cercle de Lenoir, consiste en un plateau circulaire, fixé par son centre sur une colonne supportée par trois branches dans chacune desquelles se meut une vis à caler (planc. IV, fig. 3 et 4).

Le corps de la lunette est engagé et fixé invariablement dans deux prismes carrés, par l'intermédiaire desquels elle repose et tourne sur le cercle; au milieu de l'intervalle compris entre ces prismes, la lunette est armée de deux

Fig. 159.



tourillons, dont l'un, inférieur, s'engage dans le centre évidé du plateau, pour guider le mouvement de rotation, et l'autre, supérieur, entre dans un trou pratiqué dans la règle de la bulle d'air que l'on place elle-même, soit sur les deux faces supérieures des prismes de la lunette, soit directement sur le cercle, pour le rendre horizontal.

236. Quand on veut mettre cet instrument en état de servir, on commence par rendre le plateau horizontal, comme nous venons de le dire, en posant sur son plan supérieur la bulle que l'on dirige d'abord parallèlement à la ligne qui joint deux des vis à caler, puis perpendiculairement à cette ligne. On s'assure ensuite que l'un des fils du réticule est horizontal, et, si cette condition n'est pas remplie, on tourne en conséquence le porte-fils, après avoir desserré la vis qui presse contre le corps de la lunette le manchon circulaire qui l'enveloppe.

On obtient aussi le centrage de la lunette par une vis qui

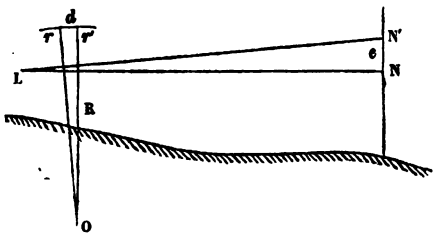
se meut dans le plan du réticule, et que l'on manœuvre, s'il y a lieu, en posant la lunette alternativement sur les faces supérieures et inférieures des prismes. On peut d'ailleurs se dispenser de centrer la lunette pour chaque distance de la mire, en prenant sur chaque point, comme avec le niveau d'Egault, la moyenne de deux coups correspondant aux deux positions de la lunette sur le limbe.

Le plateau étant horizontal et la lunette centrée, il faut encore que l'axe de cette dernière soit horizontal; c'est ce qui aura lieu si les deux prismes ont des hauteurs rigoureusement égales; c'est-à-dire, si la bulle posée sur la lunette reste au milieu, comme lorsqu'on la met directement sur le plateau. Si cette condition n'est pas remplie, on ne peut corriger l'erreur qui résulte de cette imperfection qu'en faisant diminuer un peu le prisme trop élevé, ou s'en rendre indépendant qu'en se plaçant à égales distances des points à niveler.

Enfin, lorsque la bulle s'écarte un peu de ses repères, en passant d'une direction à la suivante, on peut la rappeler en tournant celle des vis à caler du pied qui s'en rapproche le plus, sans avoir à craindre de changer d'une quantité appréciable la hauteur du plateau ou du plan horizontal des visées.

237. Si l'on peut distinguer nettement des objets fort éloignés avec le secours d'une bonne lunette, il ne faut pas en conclure qu'il soit possible de niveler avec exactitude à d'aussi grandes distances. La portée des niveaux à lunette, en général, est naturellement bornée par la sensibilité de la bulle, laquelle dépend de la longueur du rayon de courbure longitudinale R du tube qui la renferme. On comprend en effet que, si l'œil commet une erreur *d* dans l'apprécia-

Fig. 160.



tion de la position de la bulle, erreur due à une imperfection quelconque de cette partie essentielle de l'instrument, le rayon de visée déterminé par cette position du niveau diffère de l'horizontale d'une certaine quantité *e* mesurée à la distance X du point de mire. Or, les deux triangles LNN′ et O*rr*′ sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, et cette propriété fournit la relation

$$LN : rO :: NN' : rr',$$

ou

$$X : R :: e : d,$$

d'où l'on tire

$$X = R\frac{e}{d}.$$

Dans les instruments que l'on construit aujourd'hui, le rayon R est généralement égal à environ 15 mètres et, si, d'une part, l'on considère qu'il n'est guère permis d'espérer évaluer la position de la bulle à moins d'un quart de millimètre ou $0^m,00025$; si, d'autre part, l'on admet que l'erreur *e* de chaque coup de niveau puisse impunément atteindre $0^m,002$, on conclura, pour la limite de portée du nivellement à bulle d'air et à lunette, la distance fournie par la relation

$$X = 15 \times \frac{0,002}{0,00025} = 120 \text{ mètres}.$$

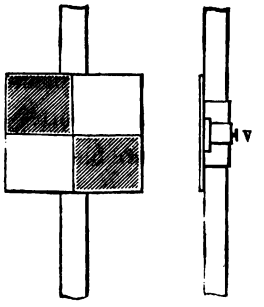
Ce résultat, on le conçoit, n'a rien de précis; c'est une simple indication de la distance que nous croyons ne pas

devoir être franchie, même dans les grandes opérations, et le nombre rond 100 mètres nous paraît être une bonne moyenne que nous conseillons de ne dépasser qu'exceptionnellement; c'est, du reste, à chaque opérateur qu'il appartient de décider pour lui-même cette question, en raison de son plus ou moins d'habitude pratique et de la portée de l'instrument dont il dispose, et en tenant surtout grand compte des indications que nous venons de donner.

MIRE A COULISSE.

238. Nous avons dit qu'on appelait *mire* une règle destinée à rendre visible et à mesurer une portion de la verticale du point dont on veut avoir la hauteur. Dans la mire le plus généralement en usage, nous voulons dire la *mire à coulisse*, on fait glisser le long de cette règle graduée en centimètres une plaque de bois mince ou de métal, de forme rectangulaire et dont la face qui doit être présentée à l'opérateur est ordinairement divisée en quatre rectangles égaux par des droites tirées entre les milieux des côtés opposés. Deux de ces rectangles, situés sur une même diagonale, sont blancs et les deux autres rouges ou noirs; la plaque elle-même se nomme le *voyant*, dont la ligne de foi résulte de l'opposition des couleurs et se présente avec beaucoup de netteté. Le trait vertical a pour objet de fixer la portion de l'image qu'il faut faire couvrir par le fil vertical de la lunette; mais les mires

Fig. 161.



qui ne doivent servir qu'avec le niveau d'eau ont simplement leur voyant mi-parti noir et blanc, avec une ligne de foi horizontale séparant les deux bandes. A la face postérieure du *voyant* est fixée une embrasse en cuivre dans laquelle passe le corps de la mire, et, au moyen de cette pièce, le voyant peut être monté ou descendu à volonté; une vis de pression V permet enfin de le fixer à la hauteur convenable.

Le corps de la mire n'est, à proprement parler, qu'une règle faite d'un bois dur, bien sec, de 2 mètres de hauteur. On ne pourrait guère lui donner une hauteur plus grande sans inconvénient, puisque le porte-mire doit pouvoir atteindre sans difficulté la partie supérieure. Afin qu'elle puisse servir à mesurer des cotes plus grandes que 2 mètres, cette règle est en outre formée de deux parties glissant à coulisses l'une sur l'autre et qui permettent d'élever le *voyant* avec la règle mobile et de le fixer par le moyen d'une seconde vis de pression que porte une embrasse semblable à la première. Au moyen de cette disposition, le voyant peut monter jusqu'à $3^{m},80$ (voir les dessins de la mire à coulisse, pl. IV, fig. 5, 6, 7 et 8).

Le dos de la mire est divisé en centimètres dont le zéro est au pied de l'instrument. Cette graduation, dont on se borne à écrire les décimètres, pour ne pas multiplier inutilement les chiffres, est complétée par une petite échelle fixée à l'embrasse du voyant, échelle dont le zéro correspond à la ligne de visée et sur laquelle on lit le nombre de millimètres qu'il faut ajouter aux centimètres trouvés, lorsque la cote est inférieure à 2 mètres. Une disposition analogue et une autre petite échelle adhérente à l'embrasse de la règle mobile servent, dans le cas où la mire est allongée, pour lire les divisions de la graduation placée sur l'une des

faces latérales. D'ailleurs, quelques autres dispositions de détail sont parfois adoptées; mais elles sont trop simples et trop faciles à apercevoir au premier examen de l'instrument, pour que nous nous y arrêtions plus longtemps.

Quelle que soit la construction de la mire employée, le porte-mire doit s'attacher à la tenir autant que possible dans une direction verticale; à la distance où il se trouve, l'opérateur ne peut qu'imparfaitement s'apercevoir des défauts d'aplomb, si ce n'est quand la mire penche à droite ou à gauche; il est alors averti soit par l'inspection directe, soit par la comparaison avec le fil vertical de la lunette ou même avec le côté de l'un des verres du niveau d'eau. Les déviations en avant ou en arrière sont à peu près impossibles à reconnaître; il faut en cela s'en rapporter à la sagacité et à la conscience du porte-mire, dont l'œil et la main font, par l'exercice, des progrès assez rapides pour que la mire soit bientôt tenue dans une position toujours convenable.

239. L'opérateur et le porte-mire étant éloignés l'un de l'autre et placés à des distances qui excèdent généralement la portée de la voix, c'est par signes que la communication doit s'établir entre eux; ceux que l'on adresse au porte-mire sont de pure convention; il en est cependant quelques-uns d'un usage assez général et qu'il est bon de faire connaître.

Pour indiquer que la mire penche, on porte la main du côté opposé; pour faire hausser ou baisser le voyant, on élève ou l'on abaisse la main à plusieurs reprises, d'un geste d'autant plus rapide et plus prononcé que le voyant est plus éloigné du rayon de visée. A mesure qu'il s'en rapproche, on diminue les mouvements et le porte-mire, de

n côté, ne déplace le voyant qu'avec précaution, de ma-ère à ne point dépasser le but.

Le signal pour indiquer que le porte-mire doit faire usage la coulisse consiste à porter la main au-dessus de la tête à l'élever à plusieurs reprises.

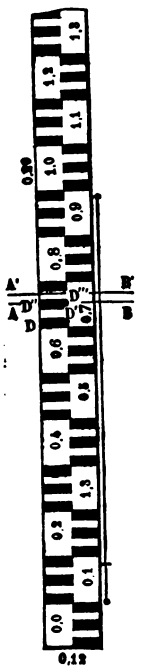
Lorsque la ligne de foi paraît être à la hauteur voulue, bservateur fait un mouvement horizontal de la main de uche à droite, et alors le porte-mire, en serrant la vis stinée à cet usage, arrête le voyant. Il remet ensuite la re en place, jusqu'à ce que l'observateur l'avertisse, par dernier signe, que le coup a été donné convenable-ent.

Afin d'user de tous les moyens de vérification dont il nt disposer, l'opérateur se fait lire à haute voix la cote r le porte-mire qui vient ensuite à lui, avec l'instrument, ur lui permettre de contrôler la première lecture dont le sultat a été préalablement inscrit au crayon.

MIRE PARLANTE.

240. Les précautions que nous venons d'indiquer pa-ltront sans doute bien minutieuses; mais il est sûr qu'on rait le plus grand tort de les négliger. C'est pour s'en franchir en partie que, dans ces derniers temps, on a con-ruit des *mires parlantes* dont la division, tournée vers bservateur, est rendue assez apparente pour que celui-ci lisse, avec sa lunette, lire la cote directement. On com-end que ces mires n'ont pas besoin de voyant; elles nt faites d'une planche de 3 mètres de hauteur sur $0^m,10$ $0^m,12$ de largeur. Quelques-unes même ont été portées squ'à une hauteur de 6 mètres. Les centimètres, alterna-

Fig. 162.



tivement rouges et blancs, se comptent aisément à l'œil, à partir du décimètre immédiatement inférieur; on estime les millimètres à vue avec une exactitude qui, pour peu qu'on ait l'habitude de cet exercice, dépasse celle des meilleures opérations faites avec la mire à coulisse.

La mire parlante a été imaginée par M. Bourdaloue, conducteur des ponts et chaussées, qui, après bien des essais sur la meilleure disposition de cet instrument, paraît s'être arrêté à une mire de $0^m,12$ environ de largeur, divisée de 20 en 20 centimètres; chacune de ces divisions forme un groupe de cinq divisions plus petites, de $0^m,04$ chacune, alternativement rouges et blanches et occupant la moitié de la largeur totale. Sur l'autre moitié, de gros chiffres noirs indiquent le nombre de groupes entiers qui se trouvent au-dessous et qu'il faut compléter par la lecture d'une certaine fraction du groupe correspondant. Enfin, les groupes de rang pair occupent la moitié de droite de la mire, et ceux de rang impair la moitié opposée.

La division de 20 en 20 centimètres n'est pas la plus naturelle et offrirait quelques difficultés à la lecture, si M. Bourdaloue n'avait eu l'heureuse idée de n'indiquer, par chaque chiffre, que la moitié de la hauteur de mire correspondante et de lire les plus petites divisions comme si celles-ci n'étaient que de 20 millimètres. Il en résulte que la somme des deux lectures consécutives faite, suivant la

Méthode de M. Égault, pour compenser les erreurs du niveau, donne le coup moyen, sans qu'il soit nécessaire de diviser cette somme par deux, comme on le fait lorsque chaque coup s'obtient en vraie grandeur; de là une économie de temps.

Un exemple éclaircira surabondamment ce que ces détails peuvent conserver d'obscur : soit AB la trace du plan de visée sur la mire; la lecture directe fournit d'abord, pour les décimètres, le nombre 0,7.

Pour le chiffre des centimètres, on remarque que la ligne de mire AB prend deux divisions entières D, D′ comptées pour 2 centimètres chacune, soit 4 centimètres à ajouter aux 0^m,7 déjà trouvés; en tout 0^m,74.

Enfin, pour les millimètres, on voit très-facilement à l'œil que la ligne AB prend les $\frac{2}{3}$ de la division D″, soit $\frac{2}{3}\times 0{,}020$, ou $\frac{1}{3}\times 0{,}040$, ou 0,013.

La cote entière déterminée par la ligne AB est donc 0,74+0,013 ou 0,753

Si maintenant l'on retourne le niveau et la lunette pour la seconde visée, on aura une autre ligne A′B′ dont, en procédant de la même manière et remarquant que cette ligne prend les $\frac{3}{4}$ de la division D‴, on trouvera la cote 0,775. Mais ces deux nombres 0,753 et 0,775 ne représentent, d'après la construction de la mire, que la moitié des longueurs verticales au moyen desquelles ils ont été calculés, en sorte que la moyenne des cotes réelles n'est autre chose que la somme de celles-ci, soit 1^m,528.

Nous avons dit que les mires de M. Bourdaloue avaient jusqu'à 6 mètres de longueur; quelquefois même il en met

deux bout à bout au moyen de deux têtes à oreilles qu'on réunit par des boulons.

Les erreurs que l'on peut commettre, lorsque des mires aussi élevées s'écartent un peu de la verticale, étant très-sensibles, on y attache un fil à plomb dont peut s'occuper le porte-mire qui n'a pas de voyant à mouvoir; la lecture du coup de niveau étant d'ailleurs extrêmement rapide, on peut prendre, comme se rapprochant le plus de la verticale, le plus petit de ceux qu'on lit successivement pendant que la mire vacille.

Nous avons entendu quelques ingénieurs préconiser hautement ces nouvelles méthodes, dont ils avaient eu l'occasion de faire et voir faire l'application; quelque incertitude que laisse l'évaluation à l'œil des portions interceptées par la ligne de visée sur les divisions élémentaires, ils ne craignent pas de leur attribuer, sous le rapport de la célérité des opérations et des chances d'exactitude, une supériorité incontestable sur l'emploi de la mire à coulisse; s'il en était ainsi, il serait bien à désirer que ces méthodes et ces instruments fussent étudiés et propagés.

OPÉRATION DU NIVELLEMENT; CARNET.

241. Quand on observe, d'une même station, toutes les cotes des points dont on veut déterminer la hauteur relative, l'opération constitue un *nivellement simple;* nous en avons exposé les principes (222) pour le cas où le nombre des points se réduit à deux; si ce nombre est plus grand que deux et si aucun de ces points n'est hors de la portée du niveau, il n'y a pas d'autre précaution à prendre que de choisir la station à une distance sensiblement égale de

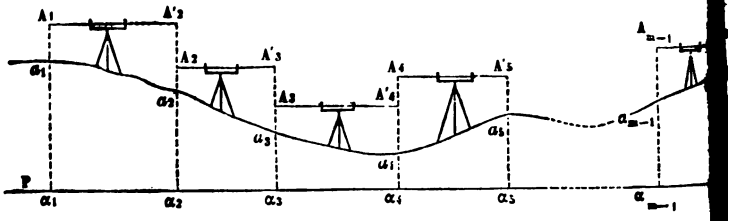
chacun d'eux, pour être dispensé des corrections que nécessite la hauteur du niveau vrai au-dessus du niveau apparent (223).

Mais le plus souvent il est impossible de trouver une station d'où puissent être donnés des coups de niveau sur tous les points à étudier; il faut alors faire un *nivellement composé*, qui n'est autre chose qu'une suite de nivellements simples, rattachés les uns aux autres par les cotes d'un même point, obtenues de deux stations consécutives.

On voit sur-le-champ que ce qui distingue théoriquement le nivellement simple du nivellement composé, c'est que le premier fournit immédiatement la cote de chaque point par rapport au plan de visée qui reste constant pour toute l'opération, tandis que, dans le nivellement composé, le plan de visée prenant autant de positions différentes qu'il y a de stations, il y a nécessité de rapporter tous ces plans et les cotes qu'ils ont déterminées à un *plan général de comparaison*. Il convient de choisir ce plan au-dessus ou au-dessous de tous les points à niveler, pour éviter d'avoir à distinguer deux catégories de cotes; néanmoins, dans le cas où il serait impossible d'agir ainsi, on lèverait toute difficulté en accompagnant du signe — et traitant comme des quantités négatives celles des cotes qui seraient situées du côté du plan où il n'est pas ordinaire qu'il y en ait.

242. Cela posé, imaginons qu'il s'agisse de déterminer, par un nivellement composé, les cotes d'un nombre quelconque m de points $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{m-1}, a_m$, par rapport à un plan de comparaison PP′ situé au-dessous de tous ces points.

Fig. 163.



Nous effectuerons, comme le représente la figure 163, entre chacun de ces points et le suivant, un nivellement simple; chacune de ces $m-1$ opérations peut se traduire algébriquement par l'égalité des hauteurs comprises entre son plan de visée et le plan de comparaison, et nous obtiendrons ainsi la série des relations qui suivent :

$$\begin{aligned}
A_1\alpha_1 &= A'_2\alpha_2,\\
A_2\alpha_2 &= A'_3\alpha_3,\\
A_3\alpha_3 &= A'_4\alpha_4,\\
A_4\alpha_4 &= A'_5\alpha_5,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-1}\alpha_{m-1} &= A'_m\alpha_m;
\end{aligned}$$

ou, en décomposant chacun des termes en ses deux parties :

$$\begin{aligned}
A_1a_1 + a_1\alpha_1 &= A'_2a_2 + a_2\alpha_2,\\
A_2a_2 + a_2\alpha_2 &= A'_3a_3 + a_3\alpha_3,\\
A_3a_3 + a_3\alpha_3 &= A'_4a_4 + a_4\alpha_4,\\
A_4a_4 + a_4\alpha_4 &= A'_5a_5 + a_5\alpha_5,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-1}a_{m-1} + a_{m-1}\alpha_{m-1} &= A'_ma_m + a_m\alpha_m.
\end{aligned}$$

Or, ces $m-1$ relations, dans lesquelles sont explicitement exprimées les cotes $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, $a_3\alpha_3$..., $a_m\alpha_m$ des points

considérés, représentent autant d'équations du premier degré, dans lesquelles les premiers termes de chaque membre sont les quantités directement déterminées par les nivellements partiels, quantités résultant respectivement de chacun des coups de niveau et, par ce motif, appelées elles-mêmes *coups de niveau*. En s'avançant de sa première station vers la dernière, l'opérateur donne, à chaque fois, un coup de niveau sur le point qu'il a laissé derrière lui et un coup sur le point qu'il a devant lui; de là les dénominations usitées de *coup arrière* et de *coup avant;* on peut remarquer, de plus, que les coups arrière sont tous placés en tête des premiers membres et les coups avant en tête des seconds.

Si maintenant, comme cela a toujours lieu, la cote de l'un des m points était connue, soit directement, soit par sa hauteur au-dessus ou au-dessous d'un point déterminé, les $m-1$ autres cotes seraient fournies sans difficulté par la résolution des $m-1$ équations posées. On se dispense toutefois, dans la pratique du nivellement, d'établir et de résoudre algébriquement ce système d'équations, et l'on calcule successivement les cotes de tous les points nivelés, en partant de celle qui est déterminée *à priori*. La forme commune des équations montre en effet, comme le prouve aussi du reste l'inspection de la figure 163, que, *pour avoir la cote de l'un quelconque des points, il faut ajouter à la cote précédente le coup arrière qui lui correspond, et retrancher de la somme obtenue le coup avant sur le point que l'on considère;* ou, ce qui revient au même, *ajouter à la cote précédente l'excès positif ou négatif du coup arrière précédent sur le coup avant du point que l'on considère;* c'est ainsi que l'on a

$$a_2\alpha_2 = A_1a_1 + a_2\alpha_2 - A'_2a_2 = a_1\alpha_1 + (A_1a_1 - A'_2a_2),$$

et en général

$$a_m\alpha_m = A_{m-1}a_{m-1} + a_{m-1}\alpha_{m-1} - A'_m a_m = a_{m-1}\alpha_{m-1} + (A_{m-1}a_{m-1} - A'_m a_m).$$

Si la cote toute connue qui indique la hauteur du plan général de comparaison, au lieu d'être celle du premier point nivelé, était celle de tout autre point tel que a_4, on partagerait la série en deux autres, savoir : d'une part, a_1, a_2, a_3, a_4, et d'autre part, a_4, a_5,... a_m; celle-ci resterait dans le cas précédent; mais, pour trouver les cotes de la première partie, il faudrait rétrograder dans l'ordre a_4, a_3, a_2, a_1, en faisant attention que les coups *avant* et *arrière* deviendraient respectivement, pour cette série, des coups *arrière* et *avant;* en d'autres termes, les quantités qui s'ajoutaient se retrancheraient, et *vice versa*. Ces changements ne présentent d'ailleurs aucune difficulté.

243. Lorsque l'on veut seulement déterminer la différence de niveau de deux quelconques des points donnés, a_2 et a_5 par exemple, il suffit de sommer membres à membres le groupe d'équations commençant par celle dont le premier membre contient $a_2\alpha_2$ et finissant par celle dont le second membre contient $a_5\alpha_5$; la relation qui en résulte est celle-ci :

$$A_2a_2 + A_3a_3 + A_4a_4 + a_2\alpha_2 = A'_3a_3 + A'_4a_4 + A'_5a_5 + a_5\alpha_5,$$

qui fournit

$$a_2\alpha_2 - a_5\alpha_5 = (A'_3a_3 + A'_4a_4 + A'_5a_5) - (A_2a_2 + A_3a_3 + A_4a_4),$$

et cette relation finale peut se traduire ainsi :

La différence de niveau de deux quelconques des points nivelés est égale à la différence entre la somme des coups avant et la somme des coups arrière donnés entre ces deux

points, et le signe de cette différence indique lequel des deux points est le plus élevé.

Appliquée aux deux points extrêmes, cette règle devient :

La différence de niveau des deux points extrêmes est égale à la différence entre la somme de tous les coups avant et la somme de tous les coups arrière, le signe de cette différence indiquant toujours lequel des deux points est le plus élevé.

244. La réunion des éléments d'un nivellement, tant de ceux qui sont donnés que de ceux qui sont déterminés sur le terrain ou par des calculs ultérieurs, se fait dans un cadre préparé à l'avance et qui constitue un *carnet* ou cahier de nivellement. Ce cadre peut être dressé sous diverses formes, dont la meilleure sera toujours celle qui, sans cesser d'être aussi simple que possible pour l'inscription des résultats sur le terrain même où ils sont recueillis, renfermera tous les éléments que l'on peut avoir intérêt à conserver. Le spécimen suivant nous paraît concilier avantageusement ces deux conditions :

POINTS NIVELÉS. Nos.	DÉSIGNATION.	DISTANCE au precedent.	COUPS de niveau.	MOYENNES arrière.	MOYENNES avant.	DIFFÉRENCES en montant, à ajouter.	DIFFÉRENCES en descendant, à retrancher.	COTES calculées d'après celle du point de départ.	OBSERVATIONS.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Piquet planté sur l'axe du projet, à l'origine de la partie considérée.....	»	1,986 1,978	1,982	»	»	»	m 129,293	Cette cote a été déduite, par un nivellement simple, du repère pris sur le dessus de la plinthe du pont Napoléon, lequel est à la cote 127m,412.
2	Piquet à l'entrée du champ de la Morinière.....	m 41,00	2,269 2,263 3,018 3,019	» 3,019	2,266 »	»	0,284	129,009	
3	Piquet dans le même champ, à 12m de l'angle sud.....	57,50	0,896 0,902 1,375 1,369	» 1,372	0,899 »	2,120	»	131,129	
4	Piquet sur l'accotement droit du chemin des Coudrais, à 36m du parapet du ponceau de ce nom.....	48,25	1,754 1,750 1,249 1,245	» 1,247	1,752 »	»	0,380	130,749	En ce point, la ligne d'opération du nivellement change sous un angle de 39° 40' à gauche.
a	Dessus du socle du pilastre de la porte du cimetière.....	»	2,855 2,851	2,853		»	1,606	129,143	
5	Piquet dans le pré haut, sur l'axe de la barrière d'entrée et vis-à-vis le 4e peuplier...	70,00	3,659 3,655 2,324 2,317	» 2,321	3,657 »	»	0,804	128,339	Vérification des calculs :
6	Piquet sur le bord de la route départementale n° 16, à 40m de la maison Blanche.....	50,00	1,193 1,189	»	1,191	1,130	»	129,469	9,941 — 9,765 = 0,176 3,250 — 3,074 = 0,176 129,469 — 129,293 = 0,176
	TOTAUX.....	266,75		9,941	9,765	3,250	3,074		

Ce tableau est ordinairement imprimé sur le recto seulement des feuilles d'un cahier; le verso, moins commode pour écrire lisiblement des chiffres sur le terrain, remplace la colonne d'observations et reste en blanc, pour recevoir toutes les notes et indications que le niveleur juge utiles ou susceptibles de jeter quelque clarté sur ses opérations; il convient d'y tracer en particulier un croquis pris sur les lieux et représentant la configuration générale du sol suivant la direction du nivellement; on y désigne aussi d'une manière spéciale le point de départ et le point d'arrivée, avec toutes les particularités propres à les faire retrouver, pour le cas où le nivellement devrait être vérifié par une autre personne, ou simplement recommencée par le même opérateur.

La disposition qui précède présente en outre une vérification facile après le calcul des cotes. D'abord, ainsi qu'on l'a vu (243), la différence entre la somme des coups arrière et celle des coups avant (colonnes 5 et 6) doit être égale à la différence des cotes des points extrêmes; il en est nécessairement de même de la différence des sommes des quantités contenues dans les colonnes 7 et 8, l'une de ces sommes exprimant combien on a monté en passant du premier point au dernier, et l'autre combien on a descendu.

245. Dans le tableau qui précède, nous avons rapporté le nivellement à un plan de comparaison inférieur; ce mode présente cet avantage que les cotes sont d'autant plus grandes que les points auxquels elles se rapportent sont eux-mêmes plus élevés, ce qui constitue un système de représentation plus naturel et se prête mieux à l'intelligence immédiate des résultats du nivellement. Il est convenable en outre de prendre pour plan de comparaison le niveau moyen du sphéroïde des mers, ou tout au moins

d'indiquer la position du plan choisi par rapport à ce niveau; par là, on donne le moyen de rattacher plus tard les uns aux autres et de faire servir à une description générale de la surface terrestre, des nivellements effectués partiellement, dans des intentions différentes et pour les besoins du moment. Dans le cas où le plan de comparaison d'un nivellement est précisément le niveau moyen de la mer, les cotes des divers points au-dessus de ce niveau sont spécialement appelées *altitudes*.

Il est inutile d'ajouter que, si nous avions voulu rapporter notre nivellement à un plan supérieur, toutes les opérations se seraient faites d'une manière absolument semblable, à cela près que les additions et soustractions, indiquées aux colonnes 7 et 8 du tableau, eussent dû être remplacées respectivement par des soustractions et des additions.

Enfin, si d'un plan de comparaison inférieur à tous les points nivelés on voulait passer à un plan supérieur à tous ces points, ou réciproquement, les nouvelles cotes s'obtiendraient en retranchant les anciennes de la distance donnée qui séparerait le second plan de comparaison du premier.

246. Nous avons fait voir (242) comment on pouvait, dans un nivellement, déterminer les cotes de tous les points considérés, en fonction de l'une d'elles et en particulier de celle du point de départ. Bien qu'à la rigueur on puisse donner à cette cote une valeur quelconque, nous avons en outre montré (245) combien il est intéressant que cette valeur soit la même pour le même point dans chacun des nivellements qui s'y rattachent, et l'on conçoit dès lors de quelle utilité il serait d'avoir, pour chaque localité, les cotes rapportées à un même plan de comparaison, et principalement

les altitudes d'une série de points remarquables, invariables, indestructibles, destinés soit à fixer la cote du point de départ de tout nivellement fait ou à faire en ce lieu, soit à vérifier de distance en distance les résultats de cette opération, à mesure qu'elle passerait à proximité de l'un quelconque de ces points qui, à cause de leur destination spéciale, portent le nom de *repères*.

L'utilité d'un pareil recueil de cotes de repères est incontestable; il serait à désirer que, pour toute la France, ces repères fussent nombreux, exactement rapportés à une même surface de niveau, vérifiés et officiellement adoptés pour servir de base à tous les nivellements. A défaut d'une pareille table, on se borne à créer, pour tout nivellement particulier, une série de repères et à y rattacher de distance en distance les cotes calculées; les coups de niveau nécessités par ces vérifications, comme tous ceux que l'on juge à propos de rattacher au nivellement sur son passage, prennent place dans le carnet général avec un numéro particulier; le spécimen du tableau du n° 244 présente un exemple de l'un de ces points sous le n° *a*, et l'on peut remarquer à ce sujet que, pour que l'introduction du coup de niveau donné sur le repère ne trouble pas la précieuse vérification qui résulte de la comparaison des totaux des colonnes 5 et 6, nous avons placé ce coup de manière qu'il fût impossible de le comprendre dans l'une ou l'autre de ces colonnes. Nous préférons cette disposition à celle qui consiste à écrire ce coup de niveau à la fois dans l'une et l'autre des deux colonnes; elle a sur celle-ci l'avantage de n'écrire qu'une seule fois la même chose et surtout de peindre aux yeux la position du point, entre le coup arrière et le coup avant de la station à laquelle il se rattache.

Les points que l'on choisit généralement pour servir de repères sont des parties remarquables et immuables de bâtiments, de puits, de ponts, d'écluses ou autres ouvrages d'art, de roches séculaires, etc. Enfin, à défaut de repères naturels ou préexistants, on en crée d'artificiels en pierre, en bois, en métal, et l'on se met en garde contre la possibilité d'une variation dans leur établissement, en les rattachant eux-mêmes à d'autres points appelés *contre-repères*.

MODES DE REPRÉSENTATION DU TERRAIN

ADOPTÉS DANS LE SERVICE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

247. Lorsqu'on a déterminé, au moyen des méthodes que nous venons d'indiquer, les hauteurs relatives des points remarquables d'une portion quelconque de la surface du sol, on peut, soit se contenter de consigner les résultats fournis par le nivellement sur la carte qui représente la projection horizontale, en y rapportant les cotes de hauteur des différents points, soit chercher à présenter aux yeux un relief du sol pour en tirer des bases certaines d'évaluation de travaux projetés. Ces deux modes, chacun à leur point de vue, sont admis dans le service des ponts et chaussées; le dernier, le plus usité, s'appuie sur le dessin d'un *profil en long* et de *profils en travers* du terrain, et le premier est connu sous le nom de *plan coté*; nous allons successivement examiner l'un et l'autre, en donnant à chacun le développement qu'il comporte.

PROFIL EN LONG. — PROFILS EN TRAVERS.

248. En général, dans les travaux des ponts et chaussées, où il s'agit le plus souvent de construire des voies

de communication, telles que routes, canaux, chemins de fer, etc., on n'a à considérer que des zones allongées de terrain, des bandes superficielles dont on doit chercher à représenter les irrégularités au moyen de surfaces géométriques qui s'approchent le plus possible de la forme accidentée du sol naturel. Pour obtenir ce résultat, on commence par diriger le nivellement suivant une ligne ou une série de lignes magistrales qui, comme pour le lever des plans, s'appellent *lignes d'opération*, et qui paraissent, par premier aperçu, s'écarter peu de l'axe futur de la voie de communication projetée; on rapporte ensuite, à l'échelle convenue, le long d'une ligne droite considérée sur le papier comme la trace du plan de comparaison, les distances des divers points nivelés à l'origine et, en chacun des points de division de cette base, on mène des ordonnées sur lesquelles, à la même échelle ou à une échelle différente de la première, comme nous l'exposerons tout à l'heure, on porte des longueurs égales aux cotes fournies par le nivellement; la figure obtenue en joignant par un trait continu les sommets de toutes les ordonnées sera considérée comme représentant le profil du terrain suivant la ligne d'opération, en un mot le *profil en long*.

Ce système, on le voit, est éminemment propre à donner une idée claire des formes, et son mérite dépend du choix judicieux des points qui servent à le déterminer; il faut évidemment placer la mire sur les points élevés ou déprimés du tracé et, généralement, sur tous ceux où l'inclinaison du terrain change d'une manière sensible.

249. La plupart des travaux exigent que l'on connaisse le relief du terrain, non-seulement dans le sens de sa longueur, mais encore suivant sa largeur; on complète alors

l'étude par des *profils en travers*, généralement dirigés suivant un plan perpendiculaire au profil en long et embrassant de chaque côté de celui-ci une étendue en rapport avec les besoins du projet qu'il s'agit de dresser ou des ouvrages qui doivent être exécutés. Les profils en travers se lèvent ordinairement de la même station qui sert à donner le coup arrière correspondant du profil en long; on conçoit dès lors qu'il serait possible de lever en même temps le profil en travers suivant par une série de coups avant; mais, pour la régularité des opérations, il est préférable d'attendre que le niveau soit à la station suivante, dans une position analogue par rapport au second profil. En d'autres termes, il convient de ne lever, de chaque station, qu'un seul profil en travers, en donnant exclusivement des coups arrière; rien n'empêcherait sans doute de choisir le système des coups avant; mais l'important est de ne pas changer sans nécessité absolue, dans le cours d'une opération, une marche que l'on aurait adoptée en commençant.

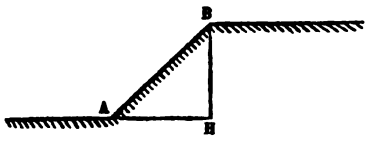
Par cette méthode, on se procure des profils en travers naturellement rattachés par la cote sur l'axe au profil en longueur; mais, si les circonstances locales ou d'autres s'opposaient à ce que les deux sortes de profils fussent levés simultanément, il serait bien simple, comme nous l'avons vu (245), de les rapporter après coup au même plan de comparaison. Enfin, quand les profils en travers doivent avoir une certaine étendue, il peut arriver qu'on soit dans l'impossibilité de les lever des stations du profil en long; on transporte alors le niveau sur ces profils eux-mêmes et on les partage en autant de stations qu'il est nécessaire, comme pour un nivellement en long.

250. Les profils en travers, très-faciles à lever, parce

261. Lorsque l'inclinaison de certaines surfaces, planes ou courbes, est assez considérable, comme dans les parois latérales d'un fossé, dans la surface qui limite le déblai ou le remblai d'une route, etc., on lui donne le nom de *talus*, et plus particulièrement encore celui de *fruit*, quand il s'agit d'un mur à face inclinée.

L'usage a prévalu de mesurer les talus en comparant non plus la hauteur à la base, comme on le fait pour les pentes, mais la base à la hauteur. Ainsi un talus AB, qui se projette horizontalement en AH, se mesure par la valeur du quotient $\frac{AH}{BH}$ et, suivant les longueurs relatives de la base AH et de la hauteur BH, ce talus sera de *un et demi de base pour un de hauteur, un de base pour un de hauteur, un demi de base pour un de hauteur*, etc. Remarquons en passant que le talus de un et demi de base pour un de hauteur ou de trois de base pour deux de hauteur est celui qui est généralement assigné aux terres rapportées en remblai, et que le talus de un pour un, correspondant à une inclinaison de 45°, est celui des tranchées ou déblais.

Fig. 169.



Il est évident d'ailleurs que le talus et la pente d'une surface sont deux quantités inverses l'une de l'autre, puisque l'un a pour mesure $\frac{AH}{BH}$ et l'autre $\frac{BH}{AH}$; la première de ces quantités peut donc facilement se déduire de la seconde et réciproquement.

Quant au fruit d'un mur, il s'exprime en fraction de la

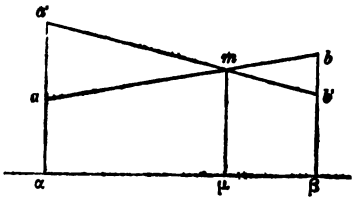
hauteur, et l'on dit qu'il est de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, etc., quand la projection de la partie inclinée, ou l'empâttement, est égale à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, etc., de la hauteur.

262. Ces définitions étant bien comprises, nous allons résoudre une question qui s'y rattache directement et qui est d'une application fréquente.

Deux profils rectilignes ab, $a'b'$ étant donnés par les cotes de leurs points extrêmes qui sont projetés deux à deux sur les mêmes points donnés α, β, trouver 1° la position, 2° la cote du point de rencontre m de ces profils.

Remarquons, pour cela, que le point m appartenant aux deux profils donnés, sa cote μm satisfait nécessairement, dans chacun de ces profils, à la relation finale du n° 253, abstraction faite du signe — du numérateur, lequel correspond au cas où le point considéré se trouve en dehors des limites des profils; il en résulte que l'on a

Fig. 170.



dans le premier profil, $\mu m = \frac{a\alpha \times \beta\mu + b\beta \times \alpha\mu}{\alpha\beta}$,

dans le second, $\mu m = \frac{a'\alpha \times \beta\mu + b'\beta \times \alpha\mu}{\alpha\beta}$.

Or, l'égalité de ces deux expressions de μm conduit à la relation

$$a\alpha \times \beta\mu + b\beta \times \alpha\mu = a'\alpha \times \beta\mu + b'\beta \times \alpha\mu,$$

dans laquelle $\beta\mu$ et $\alpha\mu$ sont les quantités qu'il faut déterminer, pour fixer la position du point m.

Remplaçant donc l'une d'elles, $\beta\mu$ par exemple, par son expression tirée de

$$\beta\mu + \alpha\mu = \alpha\beta,$$

nous obtenons sur-le-champ

$$a\alpha(\alpha\beta - \alpha\mu) + b\beta \times \alpha\mu = a'\alpha(\alpha\beta - \alpha\mu) + b'\beta \times \alpha\mu,$$

d'où, toute réduction faite,

$$\alpha\mu = \frac{a'\alpha - a\alpha}{(a'\alpha - a\alpha) + (b\beta - b'\beta)} \times \alpha\beta.$$

On aurait de même

$$\beta\mu = \frac{b\beta - b'\beta}{(a'\alpha - a\alpha) + (b\beta - b'\beta)} \times \alpha\beta.$$

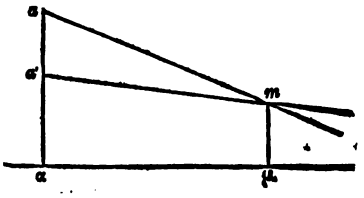
Quant à la cote μm elle-même, la substitution des valeurs trouvées pour $\alpha\mu$ et $\beta\mu$ dans l'une quelconque des deux expressions transcrites plus haut, fournit, après réduction, la valeur suivante :

$$\mu m = \frac{a'\alpha \times b\beta - a\alpha \times b'\beta}{(a'\alpha - a\alpha) + (b\beta - b'\beta)}.$$

263. Supposons maintenant qu'au lieu d'être connu par deux de ses points, chacun des deux profils soit donné par un seul point et par le taux de sa pente, et cherchons encore, dans ce cas, la position et la cote du point de rencontre.

Soient donc $a\alpha$, $a'\alpha$ les cotes des deux points a et a' situés sur la même verticale, dans deux profils dont les pentes par mètre sont respectivement p et p', et cherchons à déterminer leur point de ren-

Fig. 171.



contre m par sa cote μm et sa distance horizontale $a\mu$ au point a.

La relation du n° 258, appliquée successivement aux deux profils auxquels appartient également le point m, nous donnera

d'une part, $a\alpha - \mu m = a\mu \times p$,

d'autre part, $a'\alpha - \mu m = a\mu \times p'$,

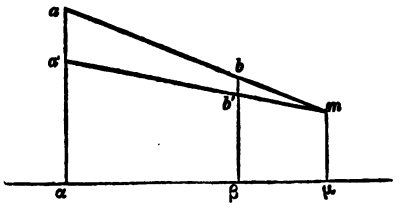
et, en résolvant ces deux équations dans lesquelles μm et $a\mu$ sont les deux inconnues, on trouve

$$a\mu = \frac{a_\alpha - a'_\alpha}{p - p'}, \quad \mu m = \frac{a'_\alpha \times p - a_\alpha \times p'}{p - p'}.$$

264. Nous ajouterons quelques observations sur les solutions des deux numéros qui précèdent.

1° Il pourrait arriver que les deux profils donnés fussent tels que leur point de rencontre se trouvât en dehors des verticales projetées en α et β; dans ce cas, représenté par la figure ci-contre, les calculs s'opéreraient tout à fait de la même manière; seulement la relation de départ serait modifiée en ce sens que l'on donnerait le signe — à la distance $\beta\mu$ (261), laquelle doit être retranchée de $\alpha\mu$, au lieu de lui être ajoutée, pour former $\alpha\beta$.

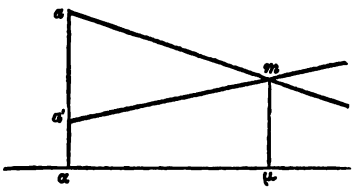
Fig. 172.



2° Dans le cas où les deux profils sont donnés chacun par un point et sa pente, la solution serait la même que celle du n° 261, si l'on voulait commencer par calculer les cotes des deux profils pour une même distance horizontale arbitrairement choisie; mais la marche directe que nous avons

indiquée est de beaucoup la plus simple; elle conduit à la solution de tous les problèmes de cette nature; seulement il faut faire attention que quand, au lieu de deux profils inclinés dans le même sens, on cherche la rencontre d'une pente et d'une rampe, la différence $p-p'$ doit être remplacée par une somme; car la différence des cotes des deux profils pour chaque mètre de distance horizontale se compose alors de l'abaissement correspondant à la pente et de l'élévation due à la rampe, et il est évident que ces deux quantités s'ajoutent. On est du reste averti de cette circonstance par les deux équations de départ, dans l'une desquelles la différence qui constitue le premier membre change de signe et prend alors la forme

Fig. 173.



$$\mu m - a'\alpha = \alpha\mu \times p',$$

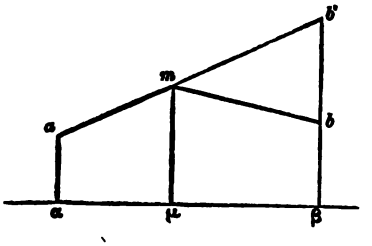
ou plutôt

$$\mu m - a'\alpha = \alpha\mu \times r,$$

si l'on convient d'indiquer par r les inclinaisons en rampe, par opposition à celles en pente auxquelles reste spécialement affectée la lettre p.

3° Lorsque les points extrêmes des profils ne sont pas donnés sur les mêmes verticales, circonstance qui se présente assez souvent, on peut encore facilement en trouver le point de rencontre. Il suffit pour cela de cher-

Fig. 174.



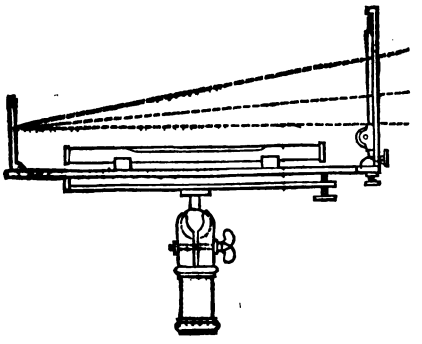
cher sur les verticales de l'un des profils les cotes des points qui appartiennent au second, et alors les solutions qui précèdent deviennent applicables. Si, par exemple, on voulait trouver la rencontre des deux profils *am* et *bm*, on prolongerait l'un d'eux *am* jusqu'à la rencontre en b' de la verticale $b\beta$; on aurait donc d'abord à calculer $b'\beta$ et l'on rentrerait dans le cas examiné.

4° Enfin, s'il arrivait que l'un des profils fût donné par deux cotes et l'autre par une cote et sa pente, il est évident qu'il faudrait opter entre les deux méthodes et ramener l'un des profils au système de détermination de l'autre. Ceci trouve notamment son application dans la recherche du point d'intersection d'un talus projeté avec le profil du terrain, question qui se rencontre à chaque instant dans les calculs relatifs aux plans parcellaires (218) et qui, comme on le voit, n'est qu'un cas particulier des problèmes que nous venons de résoudre.

DESCRIPTION ET USAGE DU NIVEAU DE PENTE.

265. On donne généralement le nom de *niveau de pente* à des instruments qui ont pour objet de diriger le rayon visuel, non plus horizontalement, mais dans une direction inclinée à l'horizon, en un mot, suivant une pente assignée d'a-

Fig. 175.



vance ou qui doit être déterminée. Il en existe plusieurs, qui diffèrent notablement les uns des autres quant à leurs dispositions; celui que nous allons décrire, le niveau de pente de Chézy, se compose d'une règle supportant en son milieu une bulle d'air et à ses extrémités deux pinnules verticales et de hauteurs inégales, lesquelles sont destinées à diriger le rayon visuel incliné. Le tout est d'ailleurs porté par une autre règle fixée sur le pied de l'instrument et sur laquelle la première est articulée à charnière et calée par une vis. Cette disposition et la présence de la bulle permettent de placer sans aucune difficulté le système dans la position horizontale qu'il doit nécessairement avoir pour donner l'indication de pente qu'il comporte.

Les pinnules (voir le dessin complet de l'instrument, planc. V, fig. 1, 2, 3) sont deux cadres rectangulaires renfermant deux châssis qui, maintenus à coulisses, peuvent se mouvoir dans le sens vertical. Celui qui correspond à la grande pinnule reçoit directement le mouvement de la main à l'aide d'un bouton et, pour les petites variations, au moyen d'une vis sans fin qui, prise à ses extrémités dans deux collets, tourne sur elle-même sans avancer; c'est par conséquent le châssis qui est entraîné et qui se meut verticalement.

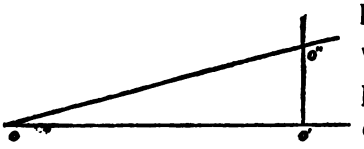
Le deuxième châssis n'est susceptible que d'un déplacement très-restreint qui peut s'opérer, comme pour le premier, au moyen d'une vis verticale, laquelle n'est d'ailleurs mise en jeu que dans les vérifications de l'instrument.

Chaque châssis porte des fils croisés et un petit trou rond évasé en cône intérieurement; c'est au sommet de ce cône que l'observateur applique l'œil pour viser, et l'oculaire ou le trou de chacune des pinnules correspond exac-

tement à la croisée des fils de l'autre, de manière à donner deux rayons visuels situés dans des plans verticaux parallèles.

266. L'un des côtés du cadre de la grande pinnule porte une échelle divisée, et un index marqué sur le châssis mobile fait connaître l'inclinaison du rayon visuel. La construction de cette échelle est des plus simples après ce qui a été dit des pentes au n° 259. Il suffit évidemment de rendre le rayon visuel oo' horizontal, la bulle étant entre les repères; on aura ainsi le zéro de l'échelle. Si l'on veut ensuite que ce rayon prenne une inclinaison donnée i par mètre, suivant la direction oo'', la quantité $o'o''$ dont il faudra élever l'index s'obtiendra par la relation

Fig. 176.



$$i = \frac{o'o''}{oo'},$$

d'où

$$o'o'' = i \times oo'.$$

Soit, par exemple, $oo' = 0^m,30$ et $i = 0^m,20$; on aura, par le calcul, $o'o'' = 0^m,06$, et la division de cette longueur en 200 parties égales que l'on porterait ensuite dans toute la longueur de l'échelle donnerait les millimètres d'inclinaison. Mais, pour ne pas avoir à établir et à lire des divisions aussi petites, on n'en fait que 40 dont chacune accuse $0^m,005$ de pente, et l'on trace sur le bord du châssis un vernier d'une longueur égale à 4 des parties ci-dessus, c'est-à-dire répondant à une inclinaison de $0^m,02$; enfin, on divise ce vernier en cinq parties égales, comprenant par conséquent chacune $0^m,004$, de sorte que la différence

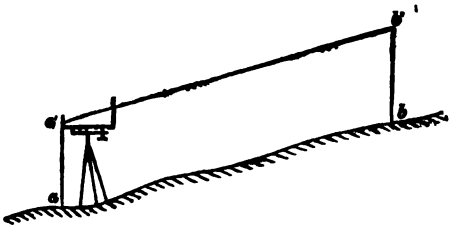
entre celles-ci et les premières donne $0^m,001$ de pente (168).

267. Avant de se servir du niveau de pente, il faut le vérifier ou le rectifier, c'est-à-dire s'assurer que le rayon de visée est bien horizontal lorsque l'index marque zéro, sinon régler l'instrument de manière que cette condition soit remplie. A cet effet, on appelle la bulle entre ses repères en tournant la vis à caler; puis on fait couvrir un point éloigné, par exemple, le voyant d'une mire, par la croisée des fils de la grande pinnule. Si, après avoir retourné l'instrument bout pour bout et ramené la bulle au milieu de son tube, le même point se trouve sous la croisée des fils de la petite pinnule, c'est une preuve qu'il donne des indications exactes. Dans le cas contraire, on rachète la différence observée, moitié en tournant la vis du châssis de la petite pinnule, moitié en tournant la vis à caler, et quelques tâtonnements suffisent d'ordinaire pour arriver au résultat désiré.

On pourrait encore régler le niveau de pente en faisant mouvoir le voyant de la mire, dans la seconde opération, jusqu'à ce qu'il vînt sous la croisée des fils; voyant de combien on a dû le faire mouvoir; lui donnant la position moyenne et y ramenant la ligne de visée par le moyen de la vis de la petite pinnule.

268. L'usage du niveau de pente de Chézy pour trouver la pente de la droite menée entre deux points donnés a, b, se présente de lui-même. On place l'instrument de manière que l'oculaire de la petite pinnule se trouve dans la verticale de celui a des points qui est le plus bas. On fait ensuite poser, au second point b, une mire dont le voyant a été fixé à une hauteur bb' égale à celle aa' de l'oculaire du

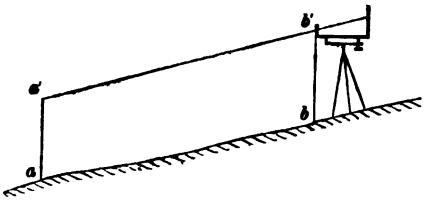
Fig 177.



niveau au-dessus du premier point, et l'on élève le châssis de la grande pinnule jusqu'à ce que la croisée des fils couvre la ligne de foi; dans cette position, la pente demandée sera évidemment celle qu'accusera le zéro du vernier.

Si des circonstances quelconques obligeaient à placer le niveau de pente au point le plus élevé *b*, on le disposerait de manière à viser par l'oculaire de la grande pinnule, pour avoir un rayon visuel plongeant; mais il faudrait alors avoir le soin de placer la croisée des fils de la petite pinnule dans la verticale du point *b*, afin de pouvoir maintenir cette croisée à une hauteur constante.

Fig. 178.



Pour résoudre la même question par le nivellement proprement dit, il faudrait prendre les cotes des deux points *a* et *b*, les retrancher l'une de l'autre, puis diviser la différence par la distance horizontale de ces points; le quotient obtenu serait la pente cherchée.

EMPLOI DU NIVEAU DE PENTE POUR TRACER SUR LE TERRAIN UNE LIGNE D'UNE PENTE DÉTERMINÉE.

269. Le niveau de pente de Chézy trouve sa principale application dans la recherche des tracés dont la pente est donnée. La marche à suivre consiste alors à disposer d'avance le châssis de la grande pinnule de manière que le rayon visuel ait l'inclinaison voulue, puis à chercher par tâtonnement un point du terrain tel que, en y faisant poser une mire dont la hauteur soit égale à celle de l'oculaire de la petite pinnule au-dessus du sol, la ligne de foi du voyant soit couverte par la croisée des fils. Il est bien clair que, d'après ce qui précède, la ligne qui va du pied de la verticale de l'oculaire à celui de la mire satisfait à la question.

Ce premier point trouvé, on y place le niveau de pente et on détermine par le même procédé un second point satisfaisant à la condition donnée, puis un troisième et autant d'autres qu'on le voudra. On obtient ainsi, de proche en proche, le tracé dont la pente est égale à celle du rayon de visée, c'est-à-dire à l'inclinaison donnée.

Les tâtonnements nécessaires pour trouver sur le terrain un point correspondant à la pente assignée peuvent paraître longs et pénibles, par la raison que, pour chaque position essayée, il est indispensable de rappeler soigneusement la bulle au milieu de son tube; l'emploi du niveau de pente exige en effet que l'opérateur ait l'habitude de se servir de cet instrument et soit exercé dans la pratique des opérations topographiques en général; mais celui qui réunit les deux conditions ci-dessus acquiert bientôt la facilité de ne porter ses recherches que sur des points du sol qui s'écartent peu de la direction convenable, et diminue par suite

considérablement les tâtonnements inhérents à cette méthode.

270. Si, au lieu de laisser le voyant de la mire dans la position fixe que lui assigne la pente donnée, on tenait seulement note de cette position et que, en chaque point essayé, on fît hausser ou baisser le voyant jusqu'à ce qu'il rencontrât la ligne de visée, la quantité $b'o$ dont il aurait fallu le faire monter ou descendre par rapport à sa première position b', indiquerait nécessairement la hauteur ou la profondeur bp du remblai ou du déblai qu'il faudrait effectuer en ce point pour donner au terrain la pente voulue. On comprend que, sous ce point de vue encore, le niveau de pente puisse être un instrument précieux.

Fig. 179.

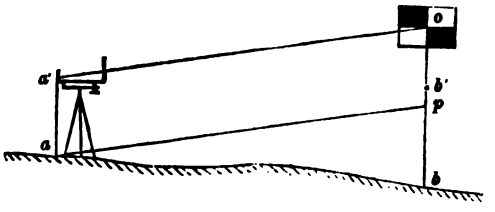
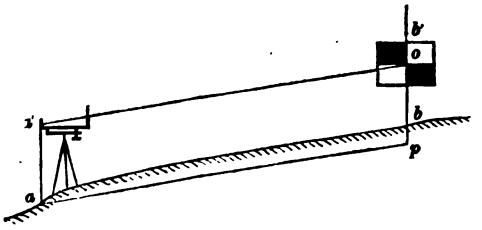


Fig. 180.



qu'ils ont généralement peu d'étendue, demandent pourtant une assez grande attention, soit pour les rattacher au profil en long, soit pour éviter la confusion dans le grand nombre de leurs cotes; on facilite toutefois ce travail, en réunissant aussi les résultats de l'opération sur un registre spécial. Le carnet le plus simple et peut-être le plus commode est ici, comme pour les profils en longueur, un croquis coté fait sur place; on obtient ainsi une minute détaillée des profils en travers, comprenant à la fois les distances horizontales des points nivelés et les coups de niveau, parmi lesquels figure nécessairement le coup qui appartient au point correspondant du profil en long.

Rien n'empêche d'ailleurs de se servir aussi d'un registre à colonnes; ce registre peut et doit naturellement être moins compliqué que celui qui sert pour le profil longitudinal; d'une part, parce que le degré d'exactitude que nécessitent les deux séries d'opérations n'est pas le même, eu égard à l'importance des erreurs possibles dans chaque cas; d'autre part, parce que, en raison même de cette première considération, les nivellements en travers s'exécutent le plus souvent au niveau d'eau. Le modèle suivant est fréquemment et avantageusement employé pour cet objet :

POINTS NIVELÉS. Désignation. 1	Nos. 2	CHAINAGE. 3	COUPS de niveau. 4	COTE CALCULÉE du plan de visée de chaque profil. 5	de chaque point nivelé par rapport au plan général de comparaison. 6	de chaque point nivelé à partir de zéro sur l'axe. 7	OBSERVATIONS, croquis, etc. 8
Profil n° I (altitude sur l'axe, 129m,293).							
. . . . .	. .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . . .
Profil II (altitude sur l'axe, 129m,009).							
Point marqué par une † sur le bord du puits.	3	m 4,25	m 0,96		m 129,789	m +0,78	
Pied du talus du jardin d'en haut. . .	2	3,32	2,04		128,709	—0,30	
Fond de l'ancien lit du ruisseau le Narais..	1	3,33	2,59		128,159	—0,85	
Piquet d'axe.	II	8,1	1,74	m 130,749	129,009	0,00	
Sur le bord du vieux chemin..	1	5	3,01		127,739	—1,27	L'aqueduc à démolir fournira 6 belles dalles de grès. m Longueur.. 1,10 Largr moye 0,45 Epaisseur.. 0,18
Sur l'axe de ce chemin	2	3,50	1,27		129,479	+0,47	
Bord intérieur du fossé	3	4,10	0,68		130,069	+1,06	
Seuil de la maison Bertrand.	4		0,78		129,969	+0,96	
Profil III.							

Ce tableau, sur lequel nous avons établi comme spécimen les calculs relatifs à un profil en travers, est d'une intelligence facile; en partant du piquet d'axe qui porte toujours le numéro du profil lui-même, on trouve, en remontant, les divers points nivelés à droite et, en descendant, les points nivelés à gauche; la colonne 3 présente en inter-

lignes, sans incertitude possible, les distances de ces points entre eux, et la colonne 4 les coups de niveau donnés de la station sur chacun d'eux. Enfin, les colonnes 5, 6 et 7 servent à calculer les cotes cherchées, soit que l'on veuille rapporter ces cotes au plan général de comparaison du nivellement en long, soit que, comme il arrive souvent, on ait intérêt à les rattacher à un plan plus rapproché, quelquefois même au plan horizontal variable qui est déterminé par la rencontre de chacun d'eux avec le profil en long; c'est alors le cas de distinguer (241) par les signes + et — les cotes respectivement situées au-dessus et au-dessous de ce plan auxiliaire.

Dans la première de ces deux hypothèses, on commence par répéter, dans la sixième colonne, vis-à-vis le piquet d'axe, sa cote rappelée à la suite de la désignation du profil en travers et, en ajoutant à cette cote le coup de niveau donné sur ce même piquet, on obtient la cote du plan de visée; il ne reste plus alors qu'à retrancher de cette dernière chacun des autres coups de niveau, pour avoir les cotes des autres points que l'on inscrit à leurs places respectives, dans la colonne 6.

Si, au contraire, on adopte le plan de comparaison variable, on laisse en blanc les colonnes 5 et 6; on inscrit dans la septième la cote zéro, en regard du piquet d'axe et, en regard de chacun des autres points, la différence entre le coup de niveau correspondant et le coup de niveau sur l'axe, cette différence étant affectée du signe + pour les coups plus petits que celui de l'axe, et du signe — pour ceux qui lui sont supérieurs.

Il est toujours entendu que les indications d'additions et de soustractions qui précèdent devraient être renversées, s'il

s'agissait d'un nivellement rapporté à un plan de comparaison situé au-dessus de tous les points considérés.

251. Nous avons expliqué ci-dessus (248) comment on construit sur le papier un profil en long ; nous devons ajouter que, à moins qu'il ne soit question de quelque ouvrage d'art important ou que quelque circonstance particulière oblige à agir autrement, il est complétement inutile et souvent même nuisible de rapporter les cotes verticales et les distances horizontales à la même échelle. En effet, le but que l'on se propose est de rendre sensibles aux yeux les inégalités du sol; or, on obtient bien mieux ce résultat en donnant à ces inégalités des dimensions doubles, quintuples et même décuples de celles qui résulteraient de l'adoption d'une échelle unique.

D'un autre côté, pour ménager la place, on peut, sans changer la forme du profil, en diminuer graphiquement toutes les cotes d'une même quantité. Il convient alors de les laisser numériquement entières, principalement lorsque le nivellement se rapporte à des repères connus dont il y aurait inconvénient à ne pas conserver la cote.

Les profils en travers se construisent de la même manière que le profil en long. On peut les faire avec une ou deux échelles, suivant l'usage auquel ils sont destinés; comme ils sont ordinairement nombreux et dessinés en regard des points du profil en long auxquels ils correspondent, on prend souvent, pour éviter la confusion, le parti de les rapporter, comme nous l'avons expliqué plus haut (250), au plan horizontal variable qui est déterminé par le piquet d'axe; dans ce dernier cas, la cote sur l'axe est nécessairement toujours égale à zéro.

252. Après avoir ainsi tracé, sur la zone de terrain que

l'on a intérêt à étudier, un profil en long et une série de profils transversaux dans chacun desquels la ligne courbe et ondulée du sol est remplacée par une ligne polygonale qui s'en écarte le moins possible, on complète la définition en considérant la portion du terrain comprise entre deux profils en travers consécutifs, comme représentée par la surface qu'engendrerait une droite s'appuyant constamment sur ces deux profils en restant dans un plan vertical parallèle à l'axe du tracé, quand celui-ci est droit. Lorsqu'il est courbe, on conçoit la génératrice du terrain comme étant toujours située dans une surface cylindrique verticale ayant pour base une courbe parallèle audit axe; cette génératrice est alors une hélice qui se transforme ensuite en ligne droite, quand on développe sur un plan la surface cylindrique qui la contient.

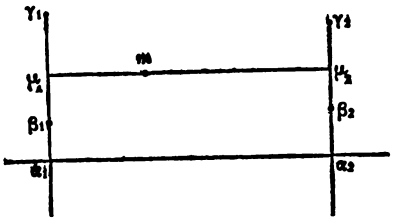
On voit que l'on obtiendra, par un tel mode, des résultats d'autant plus exacts qu'on aura choisi plus judicieusement la position des profils transversaux, qu'on aura multiplié davantage ces profils et qu'on aura défini ces profils eux-mêmes par un plus grand nombre de points convenablement déterminés.

253. Nous avons dit (248) que les lignes d'opérations suivant lesquelles se levait le profil en long étaient des lignes droites qui étaient choisies de prime abord comme paraissant s'écarter peu de l'axe du tracé futur, quand il s'agit d'un projet. Il arrive en effet presque toujours que des considérations, qui surgissent plus tard de l'étude des conditions spéciales de la question, montrent qu'il y aurait avantage à reporter l'axe du tracé un peu à droite ou un peu à gauche de la ligne primitivement et provisoirement adoptée; la définition ci-dessus donnée des surfaces que

l'on suppose représenter le terrain et la connaissance des profils en travers, s'ils sont convenablement levés et rapportés, permettent d'effectuer ce changement sans recourir à un nouveau nivellement, et cette remarque est, dans tous les cas, d'une application directe aux raccordements curvilignes des alignements droits. Il importe donc de constater que le système d'un profil en long et de deux profils en travers permet de déterminer, dans la zone que comprend ce nivellement, la cote d'un point quelconque M du terrain.

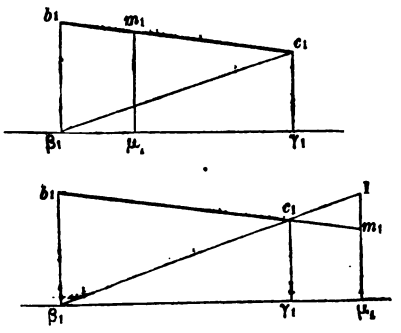
Soient en effet $\alpha_1\alpha_2$ la trace du profil en long; $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, celles de deux profils en travers consécutifs entre lesquels est situé le point M projeté sur m. Supposons tracée par le point m une ligne parallèle à l'axe $\alpha_1\alpha_2$ et soient $\mu_1\mu_2$ les points où cette ligne rencontre les deux profils en travers.

Fig. 164.



Pour calculer la cote Mm du point M, on commencera par déterminer celles des points m_1 et m_2 projetés en μ_1 et μ_2, et toute la question sera alors ramenée à évaluer la cote d'un point m_1, par exemple, projeté en μ_1 et situé sur la droite qui joint deux autres points b_1 et c_1, dont les cotes $b_1\beta_1$ et $c_1\gamma_1$ sont connues, ainsi que les distances $\beta_1\mu_1$ et $\gamma_1\mu_1$ au premier.

Fig. 165.



Tirons $\beta_1 c_1$ et nous aurons $m_1\mu_1 = I\mu_1 \pm m_1 I$, selon que le point m_1 tombera entre les deux points b_1 et c_1 ou en dehors de ces deux points.

Or, à cause des parallèles $b_1\beta_1$, $m_1\mu_1$ et $c_1\gamma_1$, nous avons

$$I\mu_1 = \frac{c_1\gamma_1 \times \beta_1\mu_1}{\beta_1\gamma_1}, \quad m_1 I = \frac{b_1\beta_1 \times \gamma_1\mu_1}{\beta_1\gamma_1},$$

et par suite, $$m_1\mu_1 = \frac{c_1\gamma_1 \times \beta_1\mu_1 \pm b_1\beta_1 \times \gamma_1\mu_1}{\beta_1\gamma_1}.$$

La cote $m_1\mu_2$ du point m_2 projeté en μ_2 se déterminerait de la même manière et celle du point M serait encore le résultat d'un calcul tout à fait identique avec le précédent.

Lorsque l'axe est courbe, cette solution ne cesse pas d'être applicable, pourvu que l'on prenne les longueurs $m\mu_1$, $m\mu_2$ sur une courbe qui lui soit parallèle; si, par exemple, la portion $\alpha_1\alpha_2$ de l'axe faisait partie d'un raccordement circulaire, la ligne $\mu_1 m \mu_2$, au lieu d'être droite, serait un arc de cercle décrit du même centre.

PLANS COTÉS.

254. Ainsi que nous l'avons exposé (247), on peut rapporter un nivellement sans le secours de profils, en inscrivant sur le plan des lieux la cote de chaque point auprès de sa projection. Ce procédé est même, dans quelques circonstances, le seul que l'on puisse employer; il est principalement usité pour certains détails qui se décrivent mieux ou plus utilement par la projection de leurs contours que par une élévation; tels sont les ruisseaux d'écoulement qui reçoivent les eaux des chaussées dans les rues des villes et

villages, les trottoirs, les entrées des maisons et, en général, tous les ouvrages qui occupent sur le plan un espace considérable en s'écartant peu du niveau du sol.

Pour que l'on puisse facilement déduire d'un plan nivelé et coté le profil du terrain dans toutes les directions, et c'est là un des principaux avantages de l'emploi de ce système, il faut choisir, pour les niveler, tous les points saillants ou sensiblement déprimés, en un mot tous les points remarquables et propres à faire concevoir plus nettement la forme du sol ou des ouvrages qui le recouvrent. La marche à suivre dans ce travail n'est d'ailleurs pas, comme on le comprend, la même que dans le cas où l'on veut avoir des profils en long et en travers; elle ne consiste plus à porter des coups de niveau dans deux directions principales, mais à faire, de chaque station convenablement choisie, un tour d'horizon en rayonnant dans tous les sens. On obtient ainsi une suite de nivellements partiels embrassant divers groupes de points et rapportés à autant de plans particuliers; il suffit alors que deux groupes consécutifs aient un point commun, pour qu'on soit à même de les rapporter tous à un plan général de comparaison, suivant la méthode exposée plus haut; telle est par conséquent la condition qu'il faut remplir dans une pareille opération et qui permet d'en coordonner tous les résultats.

255. Il peut sembler que le plan ou croquis des lieux sur lequel seraient inscrits les coups de niveau devrait suffire pour recueillir convenablement les éléments qui entrent dans la composition d'un plan coté; mais on remarquera que, pour peu que les points nivelés soient nombreux, il résulterait nécessairement de l'inscription immédiate des résultats sur le plan une confusion de nombres nuisible à

la clarté et à l'intelligence de l'opération; un pareil plan ou croquis-minute suffit à peine à recevoir sur le terrain l'indication de chaque point nivelé avec la lettre qui sert à le désigner, l'emplacement du niveau et les divers rayons de visée, et il est de toute nécessité que l'observateur soit muni d'un carnet de nivellement, comme pour le lever des profils en long et en travers; la forme ci-dessous nous paraît satisfaire à tous les besoins de cette opération.

Nos des stations	POINTS nivelés.	COUPS DE NIVEAU élémentaires.	COUPS DE NIVEAU moyens.	COTES CALCULÉES du plan de visée de chaque station	COTES CALCULÉES de chaque point.	OBSERVATIONS.
					m	
	a^*	1,070 / 1,064	1,067		127,412	* Repère pris sur le dessus de la plinthe du pont Napoléon.
	b	1,727 / 1,723	1,725	m	126,754	
I	c	1,489 / 1,496	1,493	128,479	126,986	
	d	1,911 / 1,912	1,912		126,567	
	d	0,474 / 0,478	0,476		126,567	
	e	0,584 / 0,594	0,589		126,454	
II	f	2,259 / 2,254	2,257	127,043	124,786	
	g	1,529 / 1,538	1,534		125,509	
	h	1,656 / 1,650	1,653		125,390	Socle de la maison d'école, angle Nord.
	h	3,343 / 3,349	3,346		125,390	
III	j	1,406 / 1,407	1,407	128,736	127,329	
	k	0,579 / 0,583	0,581		128,155	
	k	1,137 / 1,143	1,140		128,155	
	l	2,425 / 2,432	2,429		126,866	
	m	3,189 / 3,179	3,184		126,111	
IV	n	0,464 / 0,468	0,466	129,295	128,829	
	o	1,395 / 1,390	1,393		127,902	
	p	2,065 / 2,069	2,067		127,228	Sur la borne n° 27 du canal latéral.
	p	0,604 / 0,613	0,609		127,228	
	q	2,318 / 2,310	2,314	127,837	125,523	
V	r	1,539 / 1,535	1,537		126,300	
	etc.	etc.	.....	etc.	.....	

Comme on le voit, ce tableau diffère du premier en ce que 1° il est divisé en stations, 2° il fournit les altitudes des divers points au moyen de celle du plan de visée relatif à chaque station.

La division par stations est indispensable pour la clarté et surtout pour la vérification ultérieure des opérations; les points nivelés de chacune d'elles sont ainsi réunis par groupes séparés et la reproduction d'une même lettre dans deux groupes contigus indique sans ambiguïté le point qui leur est commun.

Nous avons supposé, et c'est en général ce qu'il convient de faire, que le point de départ du nivellement était un repère dont l'altitude était déterminée et connue d'avance; le coup de niveau donné sur ce repère a fixé la cote du premier plan de visée et la cote de chacun des autres points nivelés de cette station a été obtenue en retranchant le coup de niveau correspondant de l'altitude du plan de visée. La dernière cote de chaque station étant nécessairement la première de la station suivante, le calcul, pour chacune d'elles, s'est effectué de la même manière que pour la station de départ. Enfin la dernière colonne est destinée à recevoir toutes les remarques utiles et, entre autres, l'exacte désignation des points de station, des repères, des points communs à deux stations, etc.

Il est inutile d'ajouter encore une fois que la marche serait la même, s'il s'agissait de rapporter les cotes à un plan de comparaison supérieur, si ce n'est qu'au lieu de retrancher chaque coup de niveau de la cote du plan de visée pour avoir celle du point correspondant, il faudrait ajouter l'une à l'autre ces deux quantités.

256. L'usage s'est établi d'écrire, sur les plans cotés,

chaque cote de nivellement entre parenthèses. Cette précaution a pour but d'empêcher que l'on ne confonde ces cotes avec celles des distances horizontales, quand il s'en trouve de cette dernière espèce sur le plan; mais on peut s'en affranchir dans beaucoup de cas, attendu que le point auprès duquel la cote verticale est inscrite en désigne suffisamment la signification.

TRACÉ DES PROFILS SUR LE TERRAIN.

INDICATION DES POINTS DE HAUTEUR POUR LES DÉBLAIS ET LES REMBLAIS.

257. Le mode de description de la surface des ouvrages de terrassement projetés est semblable à celui que nous avons admis (252) pour la surface du terrain; c'est-à-dire que toute section faite, entre deux profils transversaux, par un plan vertical ou généralement par une surface cylindrique verticale parallèle à l'axe, est une ligne droite ou une hélice.

Nous supposerons donc que, par des considérations étrangères à l'objet de ce livre, l'ingénieur ait fait tracer sur chacun des profils en long et en travers du terrain naturel les contours en relief ou en creux, en *remblai* ou en *déblai*, qui doivent être donnés au sol pour l'exécution des travaux, lesdits contours étant aussi reliés au plan de comparaison par des cotes assez nombreuses pour déterminer complétement leur forme et leur position. On conçoit dès lors que les masses de terre qui doivent être rapportées ou enlevées pour donner au terrain la forme qui lui est assignée par le projet, sont limitées, dans chaque intervalle compris entre deux profils transversaux consécutifs, par des surfaces ré-

glées, gauches ou planes, et que les volumes de ces masses peuvent être évalués, comme nous le verrons bientôt, par les procédés de la géométrie ordinaire, avec le degré d'exactitude que comportent d'une part la précision des opérations sur le terrain, d'autre part le temps que l'on veut ou que l'on peut consacrer à ces calculs.

Nous avons montré de plus (253) comment on peut déterminer des hauteurs de remblai ou de déblai autres que celles qui résultent immédiatement des profils du terrain et du projet, et même construire à volonté de nouveaux profils; lorsque l'on s'est ainsi procuré les épaisseurs des tranches de terre à rapporter ou à enlever en chaque point ou, en d'autres termes, les cotes de remblai et de déblai, le premier soin à prendre, au moment de mettre la main à l'œuvre pour l'exécution, est de tracer ces divers profils sur le terrain, tant en ce qui concerne leur position en plan que pour fixer les *points de hauteur* des ouvrages à exécuter.

Cette opération est aussi simple dans ses procédés qu'elle est délicate quant aux conséquences que peut avoir la moindre fraude ou la moindre erreur; elle se réduit à planter des piquets dont la tête soit élevée au-dessus de terre ou abaissée au-dessous, conformément à des cotes connues.

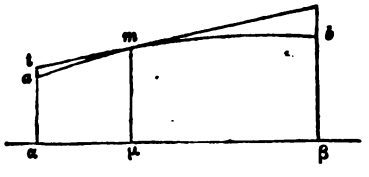
258. Quelquefois un piquet est destiné à marquer un point trop élevé au-dessus de la surface du sol pour qu'il soit facile d'en assurer la stabilité; alors on retranche de sa hauteur totale un nombre exact de décimètres et, sur la portion laissée hors de terre, on marque ce même nombre de décimètres. Il importe, dans tous les cas, que les piquets plantés puissent être retrouvés; le meilleur moyen pour assurer ce résultat serait encore de les enfoncer jusqu'à ce

qui sert à déterminer l'une quelconque d'entre elles, quand les trois autres sont connues.

On peut encore, et c'est l'ordinaire, désigner dans une même expression la position de la droite par rapport au sens du parcours et le taux de son inclinaison en disant, selon les cas, *rampe* ou *pente* de *tant* par mètre.

Si la ligne dont il s'agit n'est pas droite, on entend par pente en un point quelconque *m* de sa longueur, celle de la tangente *tm* menée à la courbe en ce point; d'où il suit que la pente le long d'une courbe est nécessairement variable d'un point au suivant.

Fig. 168.



260. Quand un plan est incliné à l'horizon, on peut mener dans ce plan, par l'un quelconque de ses points, une infinité de droites qui toutes sont diversement inclinées à l'horizon, et la géométrie enseigne que, parmi toutes ces lignes, celle qui fait avec l'horizon un angle maximum, celle dont la pente par mètre est la plus grande, la *ligne de plus grande pente* en un mot, est celle qui est dirigée perpendiculairement au système des horizontales du plan; c'est la pente de cette ligne qui mesure la pente du plan.

Dans une surface courbe, la pente en chacun de ses points est celle de son plan tangent; elle est donc égale à celle de la droite menée, dans ce plan, au point que l'on considère, normalement à la section déterminée dans la surface par un plan horizontal issu de ce point. De là le nom de *ligne de plus grande pente* que prend la ligne tracée sur une surface de manière à couper à angle droit toutes les sections horizontales.

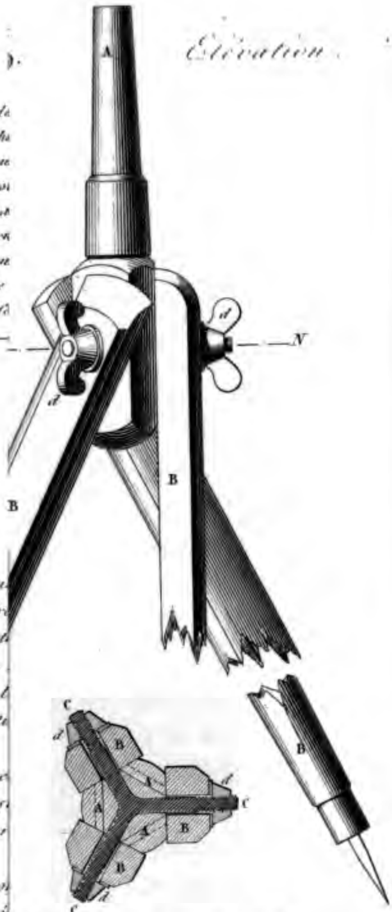
E.1

...e d'instrument (Echelle de ...)

).

Élévation.

A Poignée de...
B Premier cha...
la longueu...
C Chaînon co...
axe des d...
D Anneau en...
Δ Anneau en...
E Appendice...
F Fiche en fe...



...o. Coupe horizontale suivant MN.

...ÉGENDE.

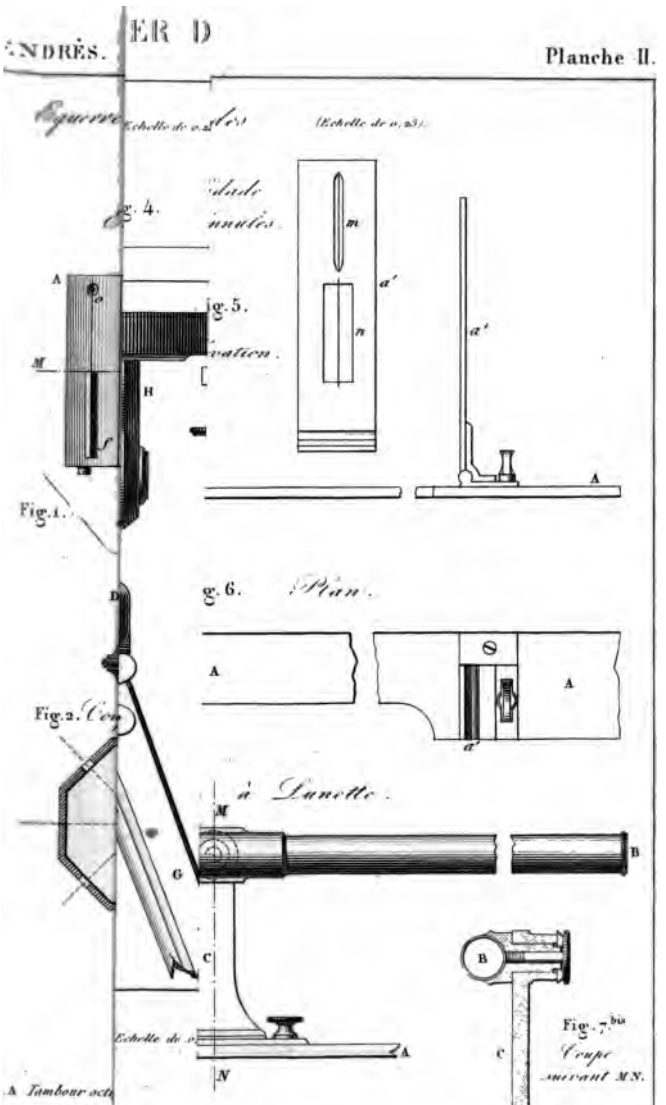
...endre toutes les inclinaison...
...placer, dans toutes les dir...
...r un pied ordinaire d'inst...
... micromètre à fil mobile ...
... à l'aide de la vis f et de l...
... sur le cadran hh, la fracti...
...ou abaissé.
... vis f. Il tend à repousse...
...mment appuyé sur son s...
... le châssis d, et qui por...
...el n.
...ement des deux fils horizo...
...les au pas de la vis, tracé...
... se déterminent, comme on...
... l'indicateur i.
...strument, voir le texte, pag...

LÉGENDE.

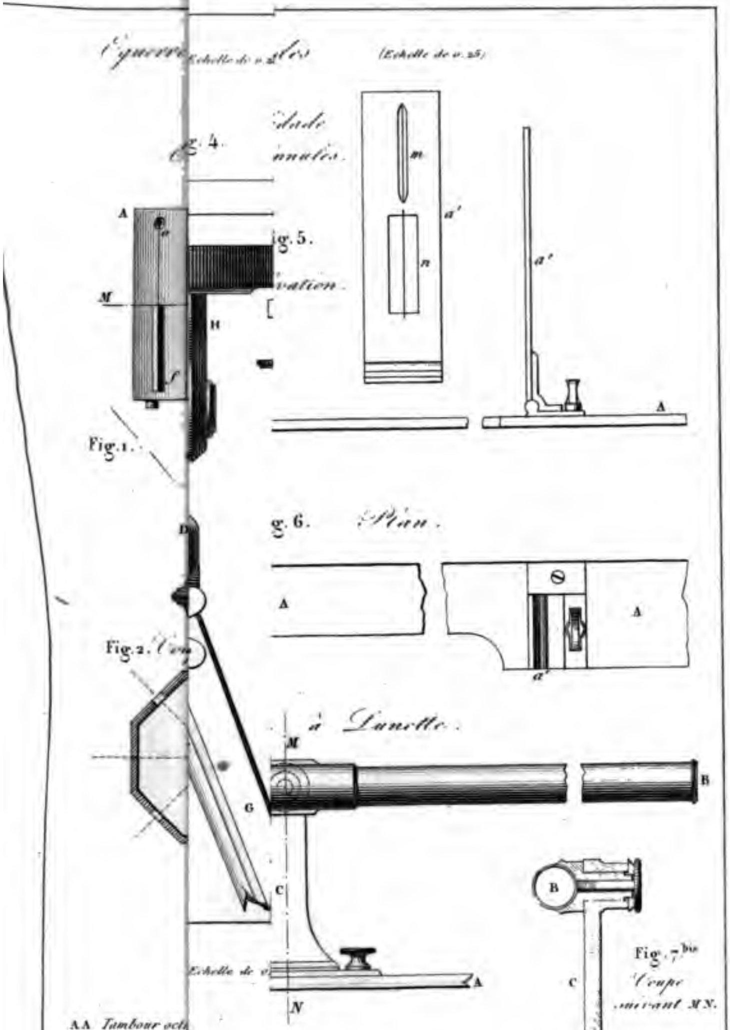
...nique à la partie supérieure et prismatique par le bas.
... terminés par une pointe de fer.
... branches serrant les pieds contre le prisme A au
...rous à oreilles d.

Lemaitre sc.

PUBLIC


Equerre
(Echelle de 0,25)
(Echelle de 0,25)
g. 4.
g. 5.
g. 6. Plan.
Fig. 1.
Fig. 2.
à Lunette.
Fig. 7bis
Coupe suivant MN.
LÉGENDE.
Lemaitre sc.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.



LÉGENDE.

AA Tambour oct...
percé de fentes
diamètraux, fil du déclina...
o.o Ouvertures q... qui en l...
leguel on veut... le aimanté...is.
f.f Fenêtres di... anté dans... pière, vues de profil et de face.
en deux parti... gradué en... l contre laquelle on applique l'œil pour viser,
vers l'objet ... aux bords... d'un fil qui doit se projeter sur l'objet visé.
D Douille qui ... sur leq... support C.
du tambour, et ... termédia... unette doit se mouvoir dans le plan vertical
qui sert de p... et l'emp... le la règle.

Lemaitre sc.

NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Compas de réduction.

(Echelle de o.25)

Fig. 6.

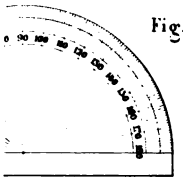
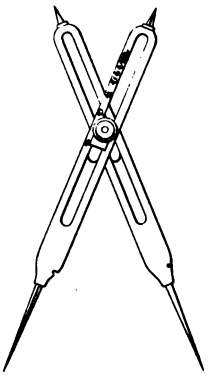
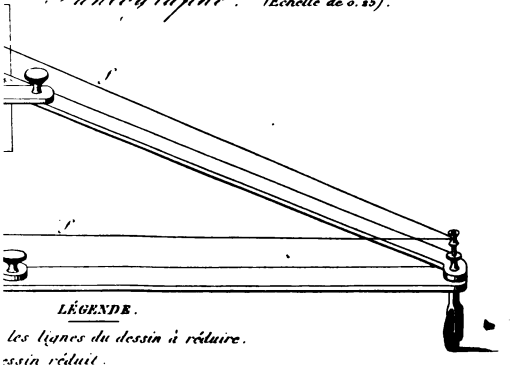


Fig. 8.



Pantographe. *(Echelle de o.25).*



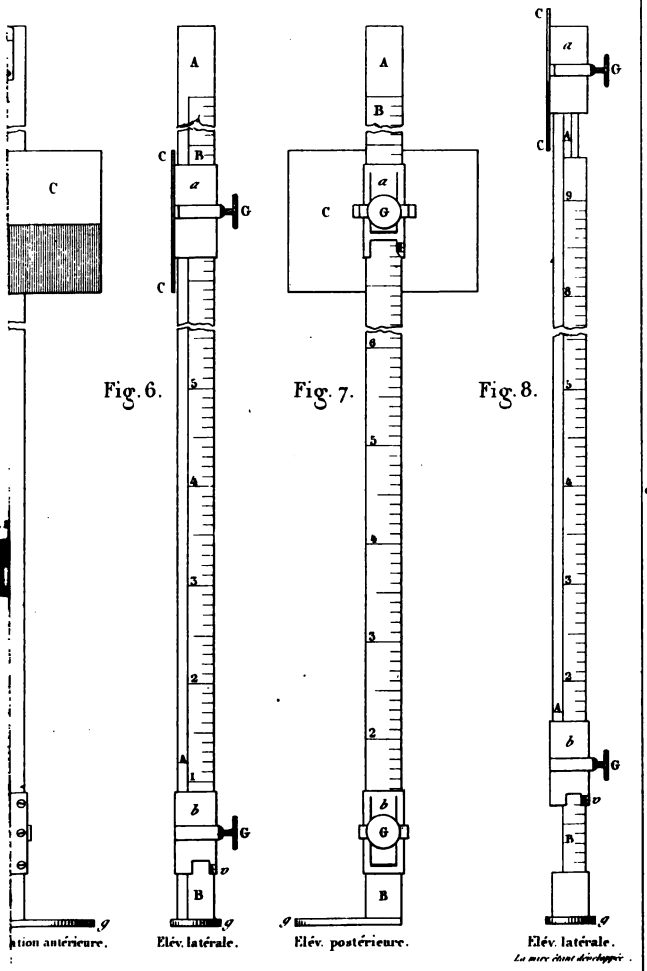
LÉGENDE.

les lignes du dessin à réduire.
ssin réduit.
re la position du centre de mouvement.
ent à la main pour soutenir le crayon, quand
ir sur un autre point de l'original.
poids additionnel en raison de la dureté du
é du trait que l'on veut obtenir

Lemaitre sc.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.

Mire à coulisse. (Échelle de 0,25).



LÉGENDE.

ons, s'emboîtant à frottement dans toute leur longueur par une languette et une coulisse.
e en cuivre, l'une mobile le long de la double règle et portant le voyant C, *l'autre*
règle A *et glissant avec elle le long de la règle* B.
gravés sur les embrasses et servant à la lecture des millimètres.
cession pour arrêter le mouvement vertical des embrasses.
n fer servant à faciliter l'application de la mire sur les points à niveler.

Lemaître sc.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Fig.

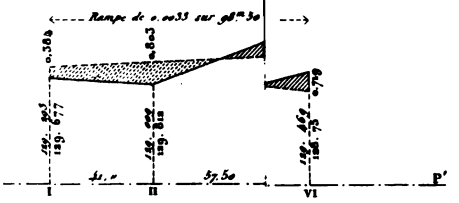
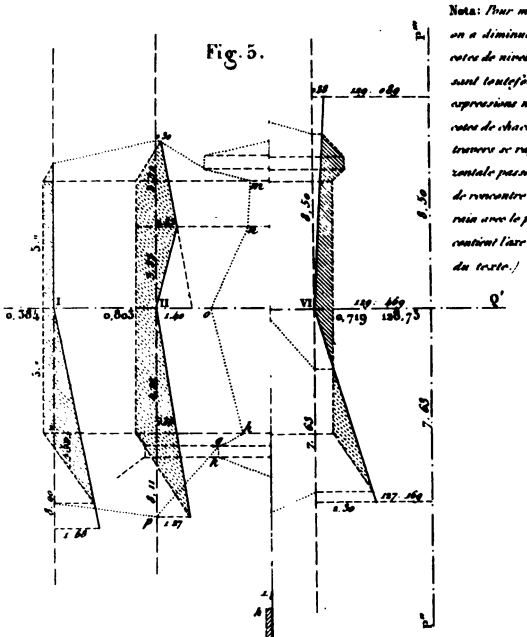
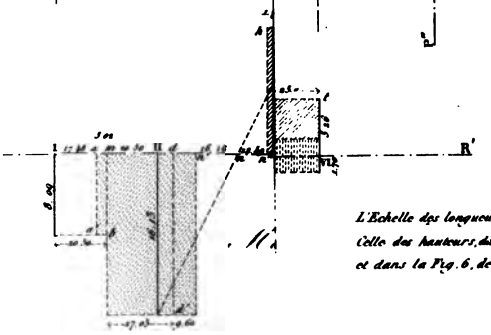


Fig. 5.





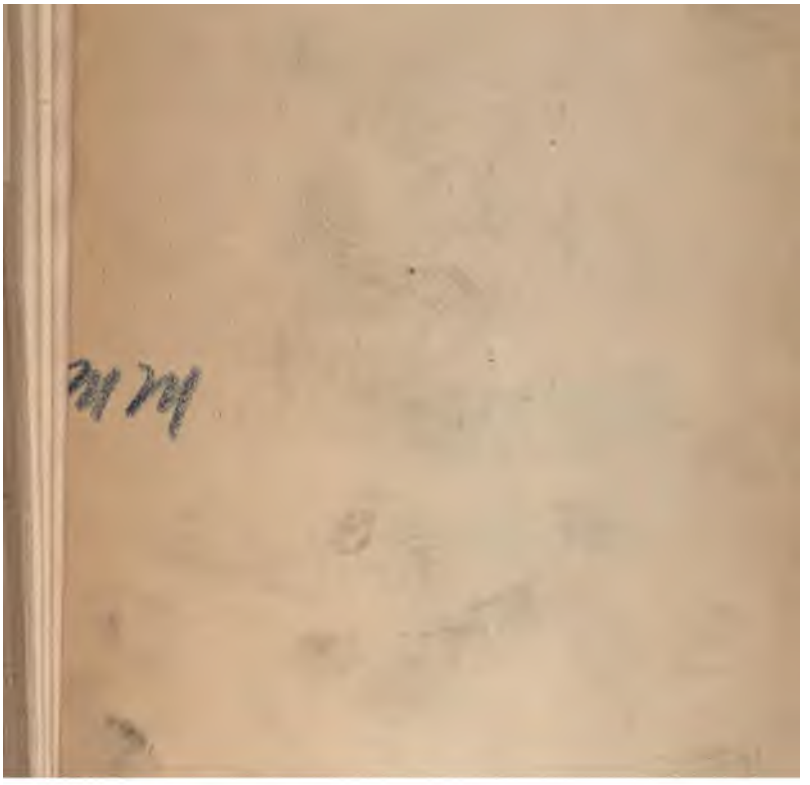
Nota: *Pour ménager l'espace, on a diminué de 125m toutes les cotes de nivellement, en laissant toutefois entières leurs expressions numériques. Les cotes de chacun des profils en travers se rapportent à l'horizontale passant par le point de rencontre de la ligne du terrain avec le plan vertical qui contient l'axe du projet (N° 80 du texte.)*

L'Echelle des longueurs est de 0m.005 par mètre, celle des hauteurs, dans les Fig. 4 et 5, de 0m.005, et dans la Fig. 6, de 0m.010 par mètre.

Lemaitre sc.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS



THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

form 410